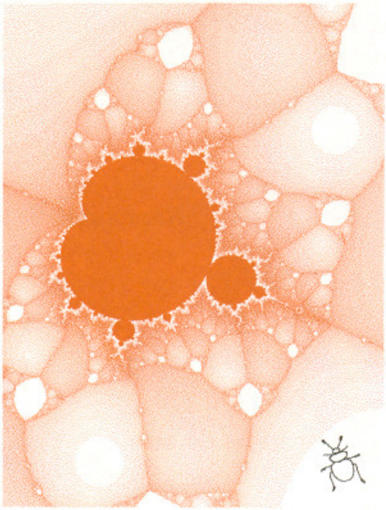
Liczby jedynkowe

Witold BEDNAREK



Liczbę naturalną, której zapis dziesiętny składa się z samych jedynek, nazywać będziemy liczbą jedynkową. Kolejne liczby jedynkowe to:

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ \ldots$$

Liczby jedynkowe mają ciekawe własności:

1. $\underbrace{11\ldots1}_{m\text{ cyfr}}$ dzieli liczbę $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ cyfr}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy m dzieli n.

2. $\mathrm{NWD}(\underbrace{11\ldots1}_{m\text{ cyfr}},\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ cyfr}}) = \underbrace{11\ldots1}_{\mathrm{NWD}(m,n)\text{ cyfr}}$.

W szczególności liczby $\underbrace{11\ldots1}_{m\text{ cyfr}}$ i $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ cyfr}}$ są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy m i n są względnie pierwsze.

3. Jeśli $p>5$ jest liczbą pierwszą, to p dzieli $\underbrace{11\ldots1}_{p-1\text{ cyfr}}$.

4. Każda liczba naturalna niepodzielna przez 2 i przez 5 ma wielokrotność będącą liczbą jedynkową.

5. Nie wiadomo, czy jakaś liczba jedynkowa większa od 1 może być potęgą liczby naturalnej (o wykładniku większym od 1). Łatwo jest wykazać, że nie może być to kwadrat; trudniej, że nie może to być trzecia ani piąta potęga. Problem, czy może to być p-ta potęga dla $p>5$, nie został rozstrzygnięty.

6. Łatwo jest wykazać, że jeśli $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ cyfr}}$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe (np. dla $n=3$). Obecnie znamy następujące liczby pierwsze jedynkowe:

$$11,\ \underbrace{11\ldots1}_{19\text{ cyfr}},\ \underbrace{11\ldots1}_{23\text{ cyfry}},\ \underbrace{11\ldots1}_{317\text{ cyfr}},\ \underbrace{11\ldots1}_{1031\text{ cyfr}}.$$

7. Wykażemy, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że n dzieli $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ cyfr}}$.

Pokażemy indukcyjnie, że liczby $n=3^k$ dla $k=1,2,3,\ldots$, spełniają postulowaną podzielność.

Dla $k=1$, oczywiście, 3^1 dzieli 111.

Załóżmy, że 3^k dzieli $\underbrace{11\ldots1}_{3^k\text{ cyfr}}$ dla pewnego $k\in N$, czyli

$$\underbrace{11\ldots1}_{3^k\text{ cyfr}} = A\cdot 3^k,$$

gdzie A jest liczbą całkowitą. Zatem $\frac{10^{3^k}-1}{9}=A\cdot 3^k$, skąd $10^{3^k}=A\cdot 3^{k+2}+1$. Wobec tego

$$\underbrace{11\ldots1}_{3^{k+1}\text{ cyfr}} = \frac{10^{3^{k+1}}-1}{9} = \frac{(10^{3^k})^3-1}{9} = \frac{(A\cdot 3^{k+2}+1)^3-1}{9} =$$
$$= ((A^3)\cdot(3^{2k+3})+(A^2)\cdot(3^{k+2})+A)\cdot 3^{k+1},$$

co kończy dowód indukcyjny, gdyż liczba ujęta w nawias jest całkowita.

Rozwiązanie zadania F 525.
Aby odpowiedzieć na pytanie, czy jest to soczewka rozpraszająca czy skupiająca, wyznaczmy wartość jej zdolności skupiającej D. Dla $D>0$ soczewka jest skupiająca, dla $D<0$ rozpraszająca. Zdolność skupiająca wyrażona jest wzorem

$$D=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),$$

gdzie: n – współczynnik załamania materiału, R_1, R_2 – promienie powierzchni sferycznych soczewki.

Podstawiając wartości z treści zadania, otrzymujemy

$$D\approx -2{,}4\ \text{dioptrii},$$

czyli soczewka jest rozpraszająca.