Tryptyk o liczbach pierwszych

Witold BEDNAREK

Twierdzenie Czebyszewa

Pafnutij Czebyszew udowodnił, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ istnieje co najmniej jedna taka liczba pierwsza, że $n < p < 2n$.

Wniosek. Jeżeli p_k oznacza k-tą liczbę pierwszą, to

$$p_{k+1} < 2p_k \quad \text{dla} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dowód. Niech k oznacza dowolną ustaloną liczbę naturalną. Zgodnie z twierdzeniem Czebyszewa istnieje taka liczba pierwsza q, że $p_k < q < 2p_k$. Mamy, oczywiście, $q \geq p_{k+1}$. Tak więc $p_{k+1} \leq q < 2p_k$, skąd $p_{k+1} < 2p_k$.

Udowodnimy, że dla każdej liczby naturalnej $m > 0$ suma

$$(*) \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2m+1}$$

nie jest całkowita.

Dowód. Oznaczmy przez p_k największą liczbę pierwszą nie większą od $2m+1$, gdzie m jest ustaloną dodatnią liczbą naturalną. Oczywiście $p_k > 2$. Zatem p_k jest liczbą nieparzystą. Liczba p_k znajduje się wśród liczb $1, 3, 5, \ldots, 2m+1$. Wykażemy, że żadna z liczb $1, 3, 5, \ldots, 2m+1$, oprócz p_k, nie jest podzielna przez p_k. Gdyby tak nie było, to wśród liczb $1, 3, 5, \ldots, 2m+1$ znajdowałaby się liczba postaci $l \cdot p_k$, gdzie $l \geq 3$ jest liczbą naturalną. Tak więc $3p_k \leq lp_k \leq 2m+1$. Z określenia p_k mamy jednak $p_{k+1} > 2m+1$. Wobec tego $p_{k+1} > 3p_k > 2p_k$, co jest sprzeczne z wnioskiem z twierdzenia Czebyszewa.

Po sprowadzeniu sumy $(*)$ do wspólnego mianownika otrzymujemy

$$\frac{A}{B} + \frac{1}{p_k} = \frac{Ap_k + B}{Bp_k}$$

gdzie liczby A i B są naturalne i B nie jest podzielne przez p_k. Liczba $\frac{Ap_k+B}{Bp_k}$ nie jest całkowita, gdyż licznik tego ułamka nie jest podzielny przez p_k.

Izolowane liczby pierwsze

Słynne twierdzenie Dirichleta głosi, że jeżeli liczby naturalne a i r są względnie pierwsze, to ciąg arytmetyczny

$$a,\ a+r,\ a+2r, \ldots$$

zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Rozważmy ciąg arytmetyczny $(15n+8)$. Ciąg ten zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Niech $p = 15n_0 + 8$ będzie jedną z nich. Liczba $p - 2 = 15n_0 + 6 = 3(5n_0 + 2)$ jest złożona. Podobnie, liczba $p + 2 = 15n_0 + 10 = 5(3n_0 + 2)$ jest złożona. Zatem najbliższa liczba pierwsza może być odległa od p (w lewo lub w prawo) co najmniej o 4.

Udowodnimy ogólnie, że dla dowolnej liczby naturalnej m istnieje taka liczba pierwsza p, że najbliższa liczba pierwsza jest odległa od p co najmniej o $2m+2$. Niech q_k^+ będzie nieparzystym dzielnikiem pierwszym liczby $2^{m+2} + 2k$, a q_k^- będzie nieparzystym dzielnikiem pierwszym liczby $2^{m+2} - 2k$ dla $k = 1, 2, \ldots, m$.

Rozważmy ciąg arytmetyczny $(q_1^+ q_2^+ \ldots q_m^+ q_1^- q_2^- \ldots q_m^- \cdot n + 2^{m+2})$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Z twierdzenia Dirichleta wynika, że ciąg ten zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Niech

$$p = q_1^+ q_2^+ \ldots q_m^+ q_1^- q_2^- \ldots q_m^- \cdot n_0 + 2^{m+2}$$

będzie jedną z nich. Liczba

$$p + 2k = q_1^+ q_2^+ \ldots q_m^+ q_1^- q_2^- \ldots q_m^- \cdot n_0 + 2^{m+2} + 2k$$

jest podzielna przez q_k^+, a więc jest złożona $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Podobnie, liczba

$$p - 2k = q_1^+ q_2^+ \ldots q_m^+ q_1^- q_2^- \ldots q_m^- \cdot n_0 + 2^{m+2} - 2k$$

jest złożona, gdyż jest podzielna przez q_k^- $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Należy jeszcze

Rozwiązanie zadania M 925.
Wysokości czworościanu $ABCD$ poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie AB i CD są prostopadłe. (Płaszczyzna zawierająca obie te wysokości zawiera również krawędź AB i jest prostopadła do CD.) Wynika stąd, że w czworościanie ortocentrycznym przeciwległe krawędzie są prostopadłe, a także, że jeśli przeciwległe krawędzie czworościanu są prostopadłe, to jego dowolne dwie wysokości przecinają się. Trzeba wykazać, że punkt przecięcia jest zawsze ten sam. Niech wysokości poprowadzone z punktów A i B przecinają się w punkcie E. Wysokość poprowadzona z wierzchołka C nie może, oczywiście, leżeć w płaszczyźnie ABE. Stąd łatwo już zauważyć, że przechodzi ona przez punkt E.

uzasadnić, że liczby $2^{m+2}+2k$ i $2^{m+2}-2k$ mają dzielnik pierwszy nieparzysty, czyli że nie są potęgami dwójki.

Przypuśćmy, że $2^{m+2}+2k=2^s$ dla pewnych naturalnych m,k,s. Ponieważ $k\le m$ i $m\le 2^{m-1}$, więc $2^{m+2}+2k\le 2^{m+2}+2^m$. Oczywiście $2^{m+2}<2^{m+2}+2k$. Wobec tego $2^{m+2}<2^s\le 2^{m+2}+2^m<2^{m+3}$. Stąd $m+2<s<m+3$, co dla naturalnych s i m jest niemożliwe.

Analogicznie wykazujemy, że założenie $2^{m+2}-2k=2^s$ prowadzi do sprzeczności.

Różnica pierwiastków kolejnych liczb pierwszych

Niech p_k oznacza k-tą liczbę pierwszą. Wykażemy, że kres dolny zbioru liczb postaci $\sqrt{p_{k+1}}-\sqrt{p_k}$ dla $k\in\mathbb{N}$ wynosi zero.

Przypuśćmy, że kres ten jest dodatni. Istnieje więc taka liczba $\varepsilon>0$, że
$$\sqrt{p_{k+1}}-\sqrt{p_k}\ge\varepsilon \qquad \text{dla} \quad k\in\mathbb{N}.$$
Wówczas
$$\frac{1}{\sqrt{p_k}}-\frac{1}{\sqrt{p_{k+1}}}=\frac{\sqrt{p_{k+1}}-\sqrt{p_k}}{\sqrt{p_kp_{k+1}}}\ge\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_kp_{k+1}}}>\frac{\varepsilon}{p_{k+1}} \qquad \text{dla} \quad k\in\mathbb{N}.$$
Podstawiamy $k=1,2,\ldots,n$ i dodajemy te nierówności
$$\left(\frac{1}{\sqrt{p_1}}-\frac{1}{\sqrt{p_2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{p_2}}-\frac{1}{\sqrt{p_3}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{p_{n-1}}}-\frac{1}{\sqrt{p_n}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{p_n}}-\frac{1}{\sqrt{p_{n+1}}}\right)>\varepsilon\left(\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\ldots+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_{n+1}}\right).$$
Po dokonaniu redukcji otrzymujemy
$$\frac{1}{\sqrt{p_1}}-\frac{1}{\sqrt{p_{n+1}}}>\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{k+1}},$$
skąd
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{k+1}}<\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{p_1}}-\frac{1}{\sqrt{p_{n+1}}}\right)<\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{\sqrt{p_1}}=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}.$$
Wiadomo jednak, że szereg złożony z odwrotności wszystkich liczb pierwszych jest rozbieżny do nieskończoności. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że szukany kres dolny jest równy zeru.

Prawdopodobnie zachodzi więcej, a mianowicie
$$\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{p_{k+1}}-\sqrt{p_k}\right)=0.$$
Inna hipoteza głosi, że
$$\sqrt{p_{k+1}}-\sqrt{p_k}<1 \qquad \text{dla} \quad k\in\mathbb{N}.$$
Gdyby powyższa nierówność była prawdziwa dla każdego k, to wynikłaby z niej nieudowodniona dotąd hipoteza:

Między dwoma dowolnymi kolejnymi kwadratami liczb naturalnych znajduje się co najmniej jedna liczba pierwsza.

Istotnie, niech n będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Niech p_k oznacza największą liczbę pierwszą mniejszą od $(n+1)^2$. Wówczas p_{k+1} jest większe od $(n+1)^2$, skąd $n+1<\sqrt{p_{k+1}}$. Ponadto na mocy przyjętego założenia $\sqrt{p_{k+1}}<\sqrt{p_k}+1$. Zatem $n+1<\sqrt{p_k}+1$. Stąd $n^2<p_k$. Ostatecznie otrzymujemy $n^2<p_k<(n+1)^2$.

Rozwiązanie zadania M 926.
a) Równość $AC^2+BD^2=BC^2+AD^2$ przepiszemy w zapisie wektorowym: $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|^2$, co po rozpisaniu za pomocą iloczynu skalarnego okazuje się być równoważne równości $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$, czyli prostopadłości krawędzi AB i CD.

b) Wynika od razu z zadania **M 925** i zadania **M 926**a.

Jeśli jakaś figura wypukła da się pokryć za pomocą 100 kół jednostkowych, to zmieszczą się w tej figurze co najwyżej 74 rozłączne jednostkowe koła. Oczywiście liczba 100 nie jest tu żadną wyróżnioną liczbą – zawsze liczba rozłącznych kół jednostkowych, mieszczących się w figurze (nie będącej kołem jednostkowym) wypukłej, jest mniejsza od $\frac{3}{4}$ liczby jednostkowych kół pokrywających tę figurę.

Dlaczego na zdjęciach rentgenowskich wymiary obrazów przedmiotów są zawsze większe od ich wymiarów rzeczywistych? Otóż dlatego, że źródło promieni rentgenowskich jest punktowe, wobec tego też wiązka promieni rentgenowskich jest rozbieżna i tym samym „cień” przedmiotu jest zawsze większy od samego przedmiotu.