

Metoda Newtona, iteracje i fraktale

Anna ZDUNIK

Rozważmy wielomian $p(z) = z^2 + 1$. Oczywiście, nie istnieje taka liczba rzeczywista z , że $p(z) = 0$. Ale w liczbach zespolonych to równanie ma dwa rozwiązania. Są to: i oraz $-i$. Przewaga liczb zespolonych nad rzeczywistymi polega na tym, że każdy wielomian

$$w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

(współczynniki a_i mogą być zespolone) ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (licząc z krotnościami) – zob. str. 8.

Weźmy wielomian $w(z)$ stopnia n i założmy (dla uproszczenia), że ma dokładnie n różnych pierwiastków. Można teraz próbować znaleźć pierwiastki wielomianu za pomocą jakiejś znanej metody iteracyjnej. Z praktyki „rzeczywistej” znamy metodę stycznych Newtona (rysunek).

Spróbujmy przenieść ją na „grunt zespolony”.

Wzór iteracji już mamy; trzeba znowu wziąć punkt startowy z_0 i wyliczać kolejne z_n według wzoru

$$z_{n+1} = z_n - \frac{w(z_n)}{w'(z_n)}.$$

Trzeba tylko umieć wykonywać cztery działania na liczbach zespolonych i powiedzieć, czym jest pochodna w' (w sensie zespolonym) naszego wielomianu. Czytelnik zgodzi się na pewno, że jeśli tylko istnieje (a istnieje) dobrze zdefiniowany sposób różniczkowania w sensie zespolonym (patrz str. 10), to pochodną naszego wielomianu powinien być wielomian

$$w'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1.$$

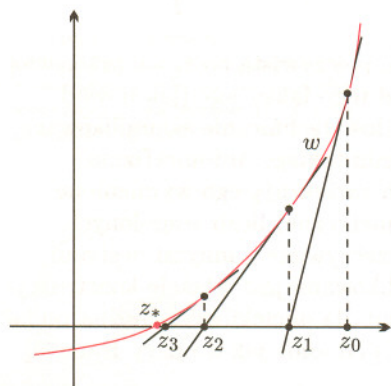
Okazuje się, że (tak jak w metodzie „rzeczywistej”) jeśli punkt startowy z_0 jest dostatecznie blisko (na płaszczyźnie) pierwiastka wielomianu z_* , to ciąg punktów płaszczyzny (czyli liczb zespolonych) z_n zbliża się do z_* . A jeśli nie jest dostatecznie blisko?

Powiemy, że metoda Newtona działa w punkcie startowym z_0 , jeśli ciąg $z_0, z_1, \dots, z_n, \dots$, określony powyżej, jest zbieżny do któregoś pierwiastka naszego wielomianu.

Dla każdego wielomianu jest wiele punktów, w których metoda Newtona na pewno nie działa. Pouczający przykład: $w(z) = z^2 + 1$, co będzie, jeśli wybierzemy $z_0 \in \mathbb{R}$? Poza tym zdarza się, że otrzymujemy we wzorze kłopotliwe dzielenie przez zero, wtedy metoda też „nie działa”.

Możemy teraz spytać, jak w takim razie dla ustalonego wielomianu w wygląda podział całej płaszczyzny na $n + 1$ części: do pierwszej zaliczymy te punkty startowe, dla których metoda Newtona nie działa; każda z pozostałych n części składa się z punktów startowych dających w granicy jeden z n pierwiastków naszego wielomianu w .

Pozostawię dociekliwemu Czytelnikowi odgadnięcie, jak wygląda ten podział np. dla wielomianu $z^2 + 1$. Prawdziwy galimatias zaczyna się i tak dopiero od $n = 3$. A fraktale? Proszę spojrzeć na tylną stronę okładki (rysunki na nią przygotował Krzysztof Barański).



„Rzeczywista” metoda Newtona. Tym razem w jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, a z_* jest jednokrotnym pierwiastkiem tego wielomianu. Wybieramy punkt startowy z_0 . Określamy ciąg z_n : $z_{n+1} = z_n - \frac{w(z_n)}{w'(z_n)}$. Inaczej mówiąc: w punkcie z_n rysujemy styczną do wykresu, z_{n+1} jest punktem przecięcia tej stycznej z osią x . Jeśli tylko punkt startowy z_0 jest **dostatecznie** blisko z_* , to ciąg z_n na pewno jest zbieżny do z_* i to bardzo szybko. Niech $g(z) = z - \frac{w(z)}{w'(z)}$. Wtedy $z_{n+1} = g(z_n)$. Zauważmy, że $g(z_*) = z_*$ i $g'(z_*) = 0$.

Metoda Newtona polega więc na iterowaniu (składaniu) funkcji g . Jeśli w jest wielomianem, to g jest funkcją wymierną. Metoda Newtona stosuje się oczywiście nie tylko do wielomianów!

✓ L. Carnot był nieufny wobec „hieroglifów analizy”. Jako przykład niebezpieczeństw płynących z ich użycia podawał taki „zespolony” rachunek: $-a = \sqrt{-a}\sqrt{-a} = \sqrt{a^2} = a$.

✓ Holomorficznej funkcji $f = u + iv$ odpowiada pole wektorowe $[u, -v]$ opisujące pozbawiony wirów przepływ nieściślej cieczy.

✓ Jak pisze Laurence Young, jeszcze w 1820 roku studenci inżynierii w Paryżu wznieśli bunt przeciwko liczbom zespolonym twierdząc, że są one zupełnie bezużyteczne, a ponadto w ogóle nie istnieją. Nie dziwi zatem fakt, że trzy wieki wcześniej pionier ich użycia – Cardano – został uwięziony pod zarzutem uprawiania czarnej magii...