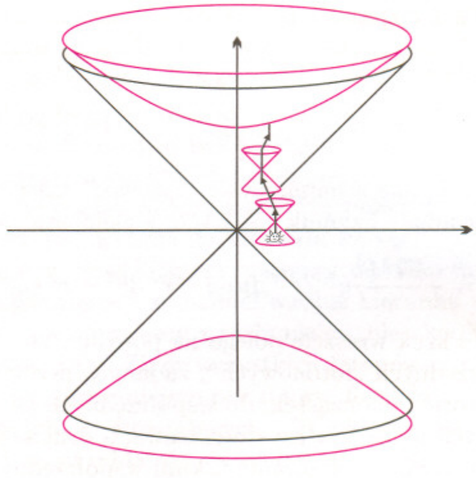
cząstek dobiegających do powierzchni $r = 2M$. Stożki we współrzędnych Kruskala–Szekeresa są zawsze zbudowane z tworzących nachylonych pod kątem 45° do osi układu.

Jesteśmy już gotowi do opisania losów kota pod horyzontem. Kot, jako obiekt masywny, porusza się zawsze po krzywej czasowej, czyli jego czteroprędkość zawsze znajduje się wewnątrz stożka świetlnego. Na diagramie Kruskala oznacza to, że jego czteroprędkość jest zawsze skierowana „w górę", w kierunku rosnącego $u$, a malejącego $r$. Wobec tego spotkanie kota z osobliwością w $r = 0$ jest nieuniknione.



# Zasada Lagrange'a a geometria

*Ewa GORA, Aleksiej TRETIAKOW i Henryk ŻOŁĄDEK*

## 1. Zasada Lagrange'a

Chyba każdy z nas zetknął się z interesującymi problemami polegającymi na znalezieniu ekstremum pewnej funkcji (na określonym zbiorze), na przykład takimi jak niżej przedstawione:

PRZYKŁAD 1. Znaleźć na płaszczyźnie trójkąt o danym polu $P$, którego obwód byłby najmniejszy.

PRZYKŁAD 2. W dany trójkąt wpisać taki trójkąt, aby jego obwód był minimalny.

PRZYKŁAD 3. Mamy dany trójkąt $ABC$. Znaleźć punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

Rozwiązanie tych problemów metodami geometrycznymi nie zawsze jest elementarne.

W niniejszym tekście chcemy przedstawić uniwersalny sposób rozwiązania następującego problemu geometrycznego na ekstremum:

*Dla danego trójkąta $ABC$ i danej liczby naturalnej $n = 2, 3, \ldots$ znaleźć punkt, dla którego suma $|x_1|^n + |x_2|^n + |x_3|^n$ potęg odległości od boków jest najmniejsza.*

Do rozwiązania tego problemu proponujemy klasyczny sposób Lagrange'a. W XVIII w. Lagrange wykoncypował następującą ogólną metodę rozwiązywania zagadnień optymalizacji. Przypuśćmy, że mamy znaleźć ekstremum funkcji $\varphi(x)$ określonej na zbiorze $X \subset \mathbb{R}^n$, danym pewnymi równaniami i nierównościami: $f_i(x) = 0$ lub $f_i(x) \geq 0$ (gdzie funkcje $f_i$ są różniczkowalne).

Jeżeli punkt ekstremalny $x^*$ leży we wnętrzu obszaru $X$ (który ma niepuste wnętrze), to warunkiem koniecznym jest

$$\varphi'(x^*) = 0, \tag{1}$$

tzn. $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x^*) = \ldots = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x^*) = 0.$

Natomiast jeśli punkt $x^*$ nie należy do wnętrza obszaru $X$, tylko leży na jego brzegu, wówczas powyższe twierdzenie nie ma sensu. Mamy do czynienia z ekstremum warunkowym: szukamy $\min \varphi(x)$ przy warunkach $f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0$. Korzystamy wtedy z zasady Lagrange'a.

**Zasada Lagrange'a** mówi, że w tym przypadku warunkiem koniecznym ekstremum w $x^*$ jest

$$\varphi'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x^*), \tag{2}$$

gdzie $\lambda_i$ są tzw. *mnożnikami Lagrange'a*. Mamy tutaj $n + m$ danych równań ($n$ równań na pochodne cząstkowe w (2) i $m$ równań $f_i(x) = 0$) na $n + m$ szukanych $x_1^*, \ldots, x_n^*$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Przy rozwiązywaniu konkretnego problemu poszukuje się ekstremów we wnętrzu $X$ i we wszystkich gładkich kawałkach brzegu, a następnie porównuje się otrzymane wartości funkcji $\varphi$ (patrz [1]).

## 2. Pewne zagadnienie geometryczne

*Dla danego trójkąta $ABC$ znaleźć punkt, którego suma kwadratów odległości od boków trójkąta jest najmniejsza.*

Rozwiążemy to zadanie, posługując się powyższą zasadą Lagrange'a, a następnie zinterpretujemy rozwiązanie w terminach tzw. symedian.

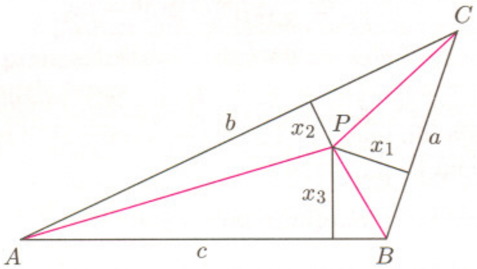
W naszym przypadku funkcją $\varphi(x)$ będzie

$$\varphi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{3}$$

gdzie $x_1$, $x_2$, $x_3$ są odległościami punktu $P$ od boków $BC$, $AC$, $AB$ (rys. 1). Zakładamy jeszcze, że $x_i \geq 0$, jeśli $x_i$ leży w tej samej półpłaszczyźnie co i sam trójkąt, w przeciwnym przypadku będzie $x_i \leq 0$.

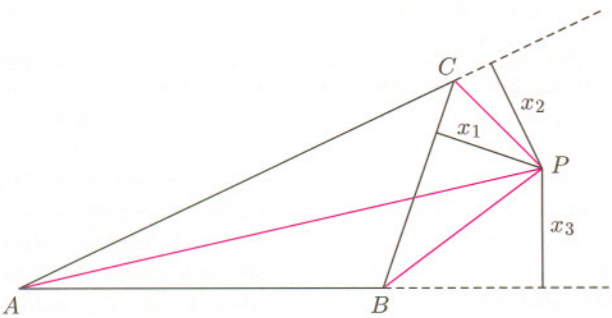
Oznaczmy jeszcze przez $a$, $b$, $c$ odpowiednie długości boków trójkąta. Pole trójkąta $BPC$ wynosi $\frac{1}{2}ax_1$, pole trójkąta $ACP$ wynosi $\frac{1}{2}bx_2$ i pole trójkąta $ABP$ wynosi $\frac{1}{2}cx_3$. Ponieważ w sumie dają pole całego trójkąta $S$, to mamy dokładnie jedno ograniczenie na $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$f(x) = \frac{1}{2}ax_1 + \frac{1}{2}bx_2 + \frac{1}{2}cx_3 - S = 0. \tag{4}$$




Rys. 1

Funkcje (3) i ograniczenie (4) są dobre również wtedy, gdy punkt $P$ leży poza trójkątem $ABC$ (rys. 2).




Rys. 2

Zgodnie z zasadą Lagrange'a mamy układ równań $\varphi'(x) = \lambda f'(x)$, tzn.

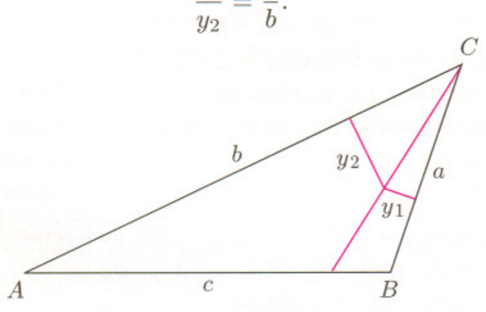
$$\begin{gathered} 2x_1 = \frac{1}{2}\lambda a, \quad 2x_2 = \frac{1}{2}\lambda b, \quad 2x_3 = \frac{1}{2}\lambda c, \\ \frac{1}{2}ax_1 + \frac{1}{2}bx_2 + \frac{1}{2}cx_3 = S. \end{gathered} \tag{5}$$

Pierwsze trzy równania w (5) dają

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a}{b}, \quad \frac{x_1}{x_3} = \frac{a}{c}, \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{b}{c}. \tag{6}$$

Pierwsza równość w (6) mówi, że punkt minimalny leży na prostej $l_C$ przechodzącej przez wierzchołek $C$ i przecinającej bok $AB$ tak, że odległości $y_1$, $y_2$ jej punktów od prostych $CB$ i $CA$ (rys. 3) spełniają zależność

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{a}{b}. \tag{7}$$




Rys. 3

Punkt $P$ jest wyznaczony jako wspólny punkt przecięcia się prostych $l_A$, $l_B$ i $l_C$ wychodzących z odpowiednich wierzchołków. Łatwo wykazać, że te proste przecinają się w jednym punkcie. Istotnie, jeśli dla punktu przecięcia się prostych $l_C$ i $l_A$ zachodzą pierwsze dwie równości w (6), to również i trzecia równość jest prawdziwa.

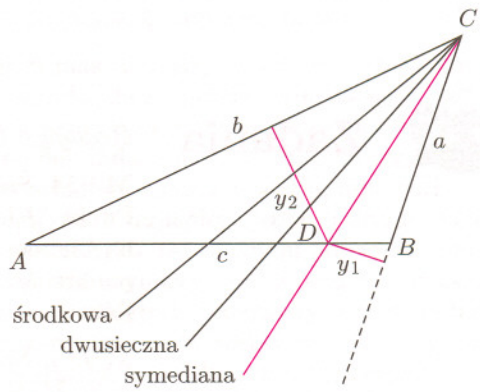
Wydaje się, że proste $l_A$, $l_B$, $l_C$ powinny być nam skądś znane. Przypomnijmy sobie, jakie naturalne proste stowarzyszone z trójkątem przecinają się w jednym punkcie. Są to: dwusieczne kątów wewnętrznych, środkowe boków, wysokości i symetralne boków. Okazuje się, że $l_A$, $l_B$, $l_C$ nie są żadnymi z powyższych. Są to tzw. symediany.

*Symedianą* trójkąta nazywamy odbicie środkowej względem dwusiecznej kąta przy wierzchołku, przez który przechodzi środkowa (rys. 4).

Aby wykazać, że nasza prosta $l_C$ jest symedianą, skorzystamy z następującej równości

$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{a^2}{b^2}, \tag{8}$$

gdzie $D$ jest punktem przecięcia prostej $AB$ z symedianą (rys. 4). Wzór (8) można znaleźć w książce [3] (można także wyprowadzić go samemu).




Rys. 4

Niech $y_1$, $y_2$ będą odległościami punktu $D$ od prostych $CB$ i $CA$ oraz niech $h$ oznacza wysokość punktu $C$ nad podstawą $AB$. Licząc na dwa sposoby pole trójkąta $BCD$, dostajemy

$$\frac{1}{2}ay_1 = \frac{1}{2}|BD|h.$$

Przeprowadzając analogiczny rachunek dla trójkąta $ACD$, otrzymamy

$$\frac{1}{2}by_2 = \frac{1}{2}|AD|h.$$

Stąd mamy

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{b|BD|}{a|AD|},$$

co na mocy (8) daje

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{a}{b}.$$

Udowodniliśmy zatem bardzo interesującą własność: *Punkt przecięcia się symedian trójkąta jest punktem, dla którego suma kwadratów odległości od boków jest najmniejsza.*

## 3. Minimalizacja sumy $n$-tych potęg odległości

Mamy teraz przypadek, gdy funkcja $\varphi$ jest postaci

$$\varphi_n(x) = |x_1|^n + |x_2|^n + |x_3|^n \tag{9}$$

i jedynym ograniczeniem jest warunek

$$f(x) = \frac{1}{2}ax_1 + \frac{1}{2}bx_2 + \frac{1}{2}cx_3 - S = 0.$$

Wówczas zgodnie z zasadą Lagrange'a mamy

$$\begin{aligned} nx_1^{n-1} &= \frac{1}{2}\lambda a, \\ nx_2^{n-1} &= \frac{1}{2}\lambda b, \\ nx_3^{n-1} &= \frac{1}{2}\lambda c, \end{aligned} \tag{10}$$

skąd otrzymujemy

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1} = \frac{a}{b}, \quad \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} = \frac{a}{c},$$

a co po przekształceniu daje nam

$$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/(n-1)}, \quad \frac{x_1}{x_3} = \left(\frac{a}{c}\right)^{1/(n-1)}. \tag{11}$$

Jeśli teraz założymy, że $n \to \infty$, to prawe strony równości w (11) dążą do 1. To sugeruje, że ciąg $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$ punktów minimum funkcji $\varphi_n(x)$ dąży przy $n \to \infty$ do punktu $x^{(\infty)}$, dla którego $x_1^{(\infty)} = x_2^{(\infty)} = x_3^{(\infty)}$; tzn. $x^{(\infty)}$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

Można inaczej dowieść zbieżności ciągu $x^{(n)}$, wykorzystując metody analizy funkcjonalnej. W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ wprowadzamy normy

$$\begin{aligned} ||x||_n &= \sqrt[n]{|x_1|^n + |x_2|^n + |x_3|^n}, \\ ||x||_\infty &= \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|). \end{aligned}$$

Wiadomo, że $||x||_n \to ||x||_\infty$ (patrz [2]). Punkty $x^{(n)}$ realizują minimum $||\cdot||_n$. Zatem punkt $x^{(\infty)}$ realizuje minimum $||\cdot||_\infty$, czyli

$$\min(\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)),$$

Stąd już łatwo otrzymać, że $|x_1^{(\infty)}| = |x_2^{(\infty)}| = |x_3^{(\infty)}|$.


**Literatura**

[1] V.G. Karmanov, *Matematičeskoje programmirovanie*, Nauka, Moskwa, 1986 (po rosyjsku).

[2] L.A. Lusternik, W.I. Sobolew, *Elementy analizy funkcjonalnej*, PWN, 1959.

[3] M. Szurek, *Opowieści geometryczne*, PWN, Warszawa, 1995,

[4] S.J. Zetel, *Geometria trójkąta*, PZWS, 1964.


# Zadania

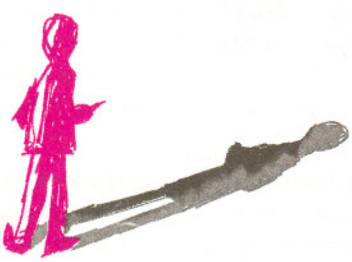
*Redaguje Łukasz WIECHECKI*

**M 934.** Średnice $AB$ i $CD$ okręgu o promieniu $R$ przecinają się pod kątem $\alpha$. Punkt $M$ leży na okręgu, a punkty $P$ i $Q$ są rzutami prostopadłymi punktu $M$ na średnice $AB$ i $CD$. Udowodnić, że długość odcinka $PQ$ nie zależy od wyboru punktu $M$. Znaleźć długość $PQ$.
Rozwiązanie na str. 11

**M 935.** Na bokach $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ prostokąta $ABCD$ wybrano punkty $K, L, M, N$ odpowiednio, różne od wierzchołków prostokąta. Wiadomo, że $KL \parallel MN$ i $KM \perp LN$. Dowieść, że punkt $S$ przecięcia odcinków $KM$ i $LN$ leży na przekątnej $BD$ prostokąta.
Rozwiązanie na str. 11

**M 936.** Punkt $D$ jest środkiem okręgu opisanego na takim trójkącie ostrokątnym $ABC$, że okrąg przechodzący przez punkty $A, B, D$ przecina odcinki $AC$ i $BC$ w punktach $M$ i $N$ (oprócz $A$ i $B$). Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach $ABD$ i $MNC$ mają równe promienie.
Rozwiązanie na str. 12

*Redaguje Ewa CZUCHRY*



**F 535.** Na wysokości 5 m jest zawieszona żarówka o natężeniu 200 cd. Największe oświetlenie jest pod żarówką i zmniejsza się równomiernie we wszystkich kierunkach. Ile wynosi pole obszaru, wewnątrz którego oświetlenie jest nie mniejsze od 1 lx?
Rozwiązanie na str. 16

**F 536.** Dwa płaskie zwierciadła tworzą kąt dwuścienny $\alpha$. Na zwierciadła te pada promień w płaszczyźnie do nich prostopadłej i odbija się od obu. Wyznaczyć kąt, o jaki odchyli się promień po odbiciu.
Rozwiązanie na str. 16