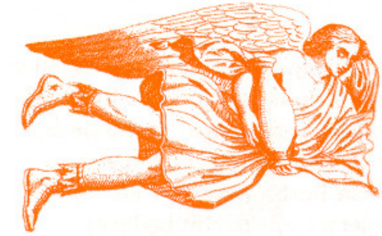
Drugi problem dotyczył rozwiązywania równań diofantycznych, tj. równań postaci



$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

przy czym $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, a niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ szukamy w zbiorze liczb całkowitych. Hilbert pytał o istnienie algorytmu pozwalającego w skończenie wielu krokach sprawdzić, czy takie równanie ma rozwiązanie, czy też nie. W 1970 roku Jurij Matijasewicz udowodnił, że takiego algorytmu nie ma.

Dwudziesty wiek przyniósł także wielki postęp i w innych zagadnieniach teorii równań diofantycznych. Chyba najbardziej sensacyjnym okazał się wspomniany już wynik A. Wilesa, który w 1995 r. udowodnił, że równanie Fermata

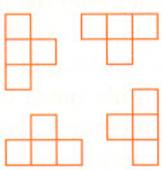
$$x^n + y^n = z^n$$

nie ma dla $n \geq 3$ rozwiązań całkowitych, spełniających warunek $xyz \neq 0$. Wcześniej, bo w 1983 r. Gerd Faltings wykazał, że równanie to może mieć co najwyżej skończenie wiele rozwiązań parami względnie pierwszych. Wynik ten to bardzo szczególny przypadek tzw. *hipotezy Mordella*, którą Faltings wówczas udowodnił, gdzie za co otrzymał medal Fieldsa. Hipoteza ta głosi, że jeśli Γ jest krzywą płaską o równaniu $F(x, y) = 0$, gdzie F jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, a przy tym jej rodzaj jest większy od 1, to może na niej leżeć jedynie skończenie wiele punktów o obu współrzędnych wymiernych. Rodzaj krzywej jest pewną liczbą całkowitą, która w przypadku, gdy Γ nie ma punktów osobliwych (tj. takich, w których znikają obie pochodne cząstkowe wielomianu F), równa jest $(n-1)(n-2)/2$, gdzie n jest stopniem wielomianu F. W przypadku równania Fermata stosuje się hipotezę Mordella do krzywej $X^n + Y^n = 1$, której rodzaj jest większy od 1 przy $n \geq 4$.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

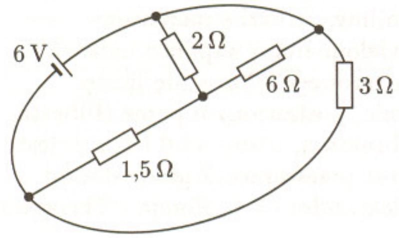
M 937. Prostokątną tablicę o rozmiarach $n \times m$, $n, m \in \mathbb{N}$, podzielono na klatki 1×1 i pokolorowano na biało. Dozwolone jest wielokrotne wykonywanie następujących operacji: zmiana koloru z białego na czarny lub z czarnego na biały wszystkich klatek zawartych w pewnym prostokącie o rozmiarach $1 \times k$ lub $k \times 1$. Kiedy za pomocą skończonej liczby powyższych operacji można zmienić kolor wszystkich klatek na czarny?
Rozwiązanie na str. 10



M 938. Dana jest szachownica o rozmiarach $n \times n$, $n \geq 3$. Dozwolone jest wielokrotne wykonywanie następującej operacji: zmiana koloru na przeciwny wszystkich pól należących do jednej z przedstawionych obok czteropolowych figur na szachownicy. Kiedy za pomocą skończonej liczby powyższych operacji można zmienić kolor wszystkich klatek na przeciwny?
Rozwiązanie na str. 6

M 939. Pokratkowana płaszczyzna jest na początku cała pokolorowana na biało. Dozwolone jest wielokrotne wykonywanie następującej operacji: zmiana koloru na przeciwny wszystkich pól należących do pewnego kwadratu 3×3 lub 4×4. Czy za pomocą tych operacji można zaczernić klatki pewnego kwadratu 2×2 i nie zmienić koloru pozostałych klatek?
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Ewa CZUCHRY



F 537. Dwie kulki węglowe mają niewielki nadmiar elektronów. Jaki musi być stosunek liczby dodatkowych elektronów do liczby protonów, aby siły elektrostatyczna i grawitacyjna równoważyły się?
Rozwiązanie na str. 11

F 538. Jakie jest całkowite natężenie prądu z baterii w obwodzie przedstawionym obok?
Rozwiązanie na str. 14