

DLACZEGO? (1)

Rozważmy ciąg określony następująco. Niech $a_0 = 6803$ oraz niech dla $n \geq 0$

$$a_{n+1} = f(a_n),$$

gdzie $f(k)$ jest liczbą $23k + 1$ podzieloną przez $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, przy czym a, b, c, d są największe możliwe. Innymi słowy, funkcja f mnoży liczbę przez 23, dodaje 1, a następnie usuwa z rozkładu na czynniki pierwsze czynniki jednocyfrowe. Natomiast a_n jest n -krotną iteracją funkcji f zastosowaną do liczby 6803.

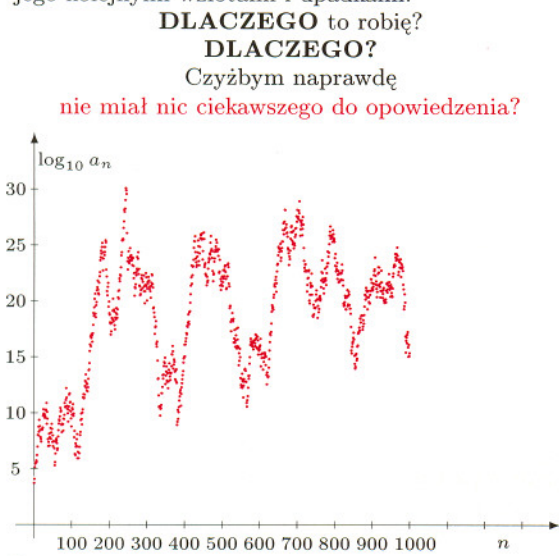
Przyjrzyjmy się dokładnie ciągowi (a_n) . Początkowe wyrazy ciągu podane są w tabeli. Widzimy, że ciąg ma tendencję rosnącą, chociaż nie jest monotoniczny – największy wyraz w tabeli to 10-cyfrowe a_{14} . Zaznaczenie na wykresie wartości a_n dla $n \leq 1000$ pokazuje oblicze ciągu (rys. 1). Widzimy, że jest on dosyć kapryśny, ale ogólnie ma tendencję wzrostową. Odnotujemy, że $a_{33} = 96\,345\,474\,713$ ma 11 cyfr, potem ciąg spada do 6-cyfrowego $a_{55} = 255\,709$, a największy wyraz a_{245} ma 31 cyfr.

Patrząc na dziesięć tysięcy wyrazów ciągu (rys. 2), znajdujemy nowy rekord a_{9975} mający 76 cyfr. Po drodze jednak ciąg spada do 15-cyfrowego a_{6609} . Zaraz potem ciąg wędruje w setki cyfr. Na rysunku 3 widzimy, jak po osiągnięciu lokalnego minimum a_{70217} z 287 cyframi ciąg odbija w górę, aby ustanowić 656-cyfrowy rekord a_{83618} .

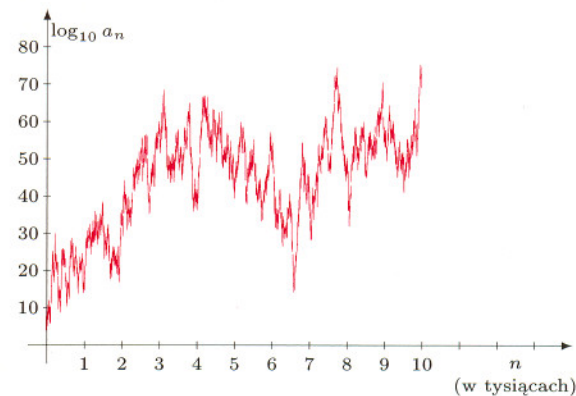
Milion wyrazów ciągu (rys. 4) nie pokazuje nic rewelacyjnego. Wprawdzie ciąg schodzi w dół do 204 cyfr przy a_{166083} , ale później idzie w górę do 1733-cyfrowego a_{903460} . Dziesięć milionów wyrazów (rys. 5) – spadek do 590-cyfrowego $a_{8761878}$ jest szybko zrekompensowany gwałtownym wzrostem do nowego rekordu $a_{9746404}$ z 3736 cyframi (podanie tak dużej liczby zajęłoby prawie cały Γ-limatias).

No i popatrz teraz, Drogi Czytelniku, co ja robię. Wziąłem sobie jakiś ciąg. Trochę kapryśny, ale uciekający do góry. Liczę miliony jego wyrazów, które idą w tysiące cyfr i ekscytuję się jego kolejnymi wzlotami i upadkami.

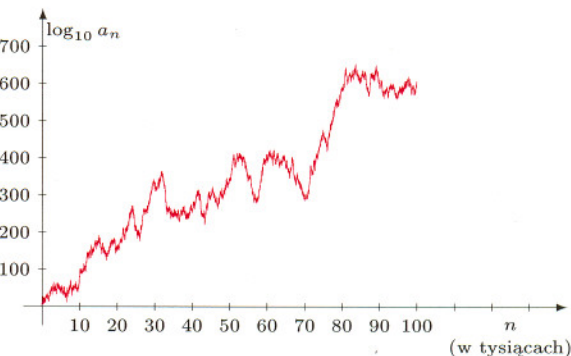
n	a_n
0	6803
1	15647
2	179941
3	344887
4	440689
5	422327
6	693823
7	531931
8	2039069
9	11724647
10	134833441
11	129215381
12	742988441
13	267011471
14	3070631917
15	840768263
16	386753401
17	92659669
18	59199233
19	34039559
20	391454929



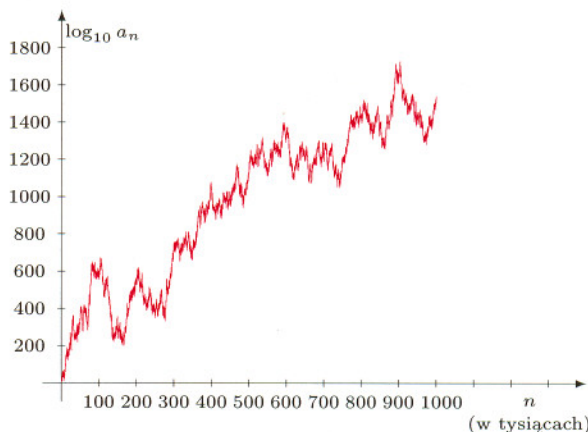
Rys. 1



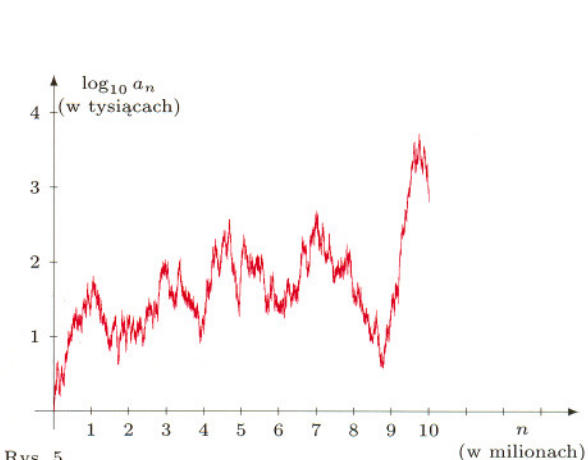
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl