# $\Gamma$-$\lim_{n\to\infty}$atias

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (27)

ZADANIE 1: Czy szachownicę o wymiarach $8\times 8$ z usuniętym narożnym polem można wypełnić prostokątnymi klockami o wymiarach $3\times 1$?

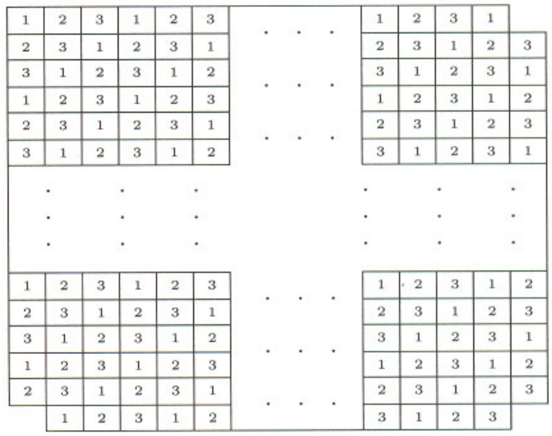
*Rozwiązanie:*
Ponumerujmy pola szachownicy jak na rysunku 1. Wówczas każdy klocek umieszczony na szachownicy pokrywa trzy pola z różnymi numerami. Nietrudno policzyć, że spośród 63 pól szachownicy 21 ma numer 1, 22 mają numer 2, 20 ma numer 3. Każda figura wypełniona klockami ma równą liczbę pól z każdym z numerów, zatem żądane pokrycie szachownicy rozłącznymi klockami nie jest możliwe.

ZADANIE 2: Czy szachownicę o wymiarach $50\times 51$ z usuniętymi polami z trzech naroży można wypełnić prostokątnymi klockami o wymiarach $3\times 1$?

*Rozwiązanie:*
Numerujemy szachownicę jak w poprzednim zadaniu (na rysunku 2 pokazano numerację w pobliżu naroży). Uważne przeliczenie pokazuje, że pól z każdym z trzech numerów $1, 2, 3$ jest tyle samo, a mianowicie 849. Zatem szachownicę można pokryć 849 klockami o wymiarach $3\times 1$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | |

Rys. 1




Rys. 2

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (28)

ZADANIE: Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $a, b, c, d, e$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[6]{a}\sqrt[3]{c}+\sqrt[6]{b}\sqrt[3]{d}+\sqrt[6]{c}\sqrt[3]{e}+\sqrt[6]{d}\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{e}\sqrt[3]{b}\le$$
$$\le\sqrt{5(a+b+c+d+e)}\,.$$

*Rozwiązanie:*
Wykorzystamy następujące twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych.

TWIERDZENIE.
Niech $x_1\le x_2\le\dots\le x_n$ oraz $y_1, y_2, \dots, y_n$ będą liczbami rzeczywistymi. Rozważamy wszystkie liczby postaci $S_\sigma = x_1y_{\sigma(1)}+x_2y_{\sigma(2)}+\ldots+x_ny_{\sigma(n)}$ , gdzie $\sigma$ jest permutacją zbioru $\{1,2,\dots,n\}$. Wówczas dla permutacji $\sigma$, dla której $y_{\sigma(1)}\le y_{\sigma(2)}\le\ldots\le y_{\sigma(n)}$, liczba $S_\sigma$ jest największa. Natomiast dla permutacji, dla której $y_{\sigma(1)}\ge y_{\sigma(2)}\ge\ldots\ge y_{\sigma(n)}$, liczba $S_\sigma$ jest najmniejsza.

*Uwaga:*
Wartość największa (i odpowiednio najmniejsza) liczby $S_\sigma$ może być przyjmowana także dla innych permutacji, jeśli np. $x_1=x_2$, to największą wartość liczby $S_\sigma$ daje także każda permutacja, dla której $y_{\sigma(2)}\le y_{\sigma(1)}\le y_{\sigma(3)}\le y_{\sigma(4)}\le\ldots\le y_{\sigma(n)}$ .

*Idea dowodu twierdzenia:*
Jeżeli dla danej permutacji $\sigma$ istnieje takie $k\in\{1,2,\dots,n-1\}$, że $y_{\sigma(k)}>y_{\sigma(k+1)}$, to dla permutacji $\sigma'$ określonej wzorem $\sigma'(i)=\sigma(i)$ dla $i\notin\{k,k+1\}$, $\sigma'(k)=\sigma(k+1)$, $\sigma'(k+1)=\sigma(k)$ zachodzi nierówność $S_{\sigma'}\ge S_\sigma$ .

Przechodzimy teraz do rozwiązania zadania. Bez szkody dla ogólności rozumowania możemy założyć, że $a\le b\le c\le d\le e$. Wówczas $\sqrt[6]{a}\le\sqrt[6]{b}\le\sqrt[6]{c}\le\sqrt[6]{d}\le\sqrt[6]{e}$ i na mocy twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych

$$\sqrt[6]{a}\sqrt[3]{c}+\sqrt[6]{b}\sqrt[3]{d}+\sqrt[6]{c}\sqrt[3]{e}+\sqrt[6]{d}\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{e}\sqrt[3]{b}\le$$
$$\le\sqrt[6]{a}\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{b}\sqrt[3]{b}+\sqrt[6]{c}\sqrt[3]{c}+\sqrt[6]{d}\sqrt[3]{d}+\sqrt[6]{e}\sqrt[3]{e}=$$
$$=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\,,$$

gdyż $\sqrt[3]{a}\le\sqrt[3]{b}\le\sqrt[3]{c}\le\sqrt[3]{d}\le\sqrt[3]{e}$.

Ponieważ funkcja $f(x)=\sqrt{x}$ jest wklęsła, z nierówności Jensena otrzymujemy

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)+f(d)+f(e)}{5}\le f\left(\frac{a+b+c+d+e}{5}\right),$$

co daje

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\le 5\sqrt{\frac{a+b+c+d+e}{5}}=$$

$=\sqrt{5(a+b+c+d+e)}$ . Tym samym dowód danej w zadaniu nierówności został zakończony.

Następny $\Gamma$-limatias będzie poświęcony liczbie 47, a wyjaśnienia oszustw zamieścimy za dwa miesiące.

Korespondencję do $\Gamma$-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl