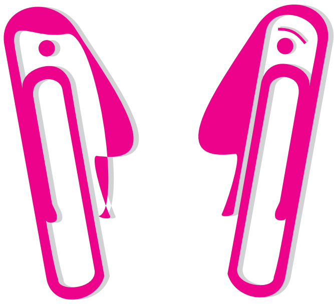
Klub 44

Regulamin



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 7 i 8 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/2001 upłynął 31 stycznia 2002). Szkicowe rozwiązania podawane są w numerze $n+4$.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. **4**), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44 M** lub **Klubu 44 F**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44 M** (lub **Klubu 44 F**) daje tytuł **Weterana Klubu 44 M** (**Klubu 44 F**).

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z niezmienioną sumą punktów trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik powiększy stan swojego konta.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka.

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.

Weterani **Klubu 44 F**
(w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma, P. Gworys, A. Idzik (4), T. Wietecha, J. Łazuka

(jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie **Klubu 44 F**
(alfabetycznie)

„dwukrotni”:

J. Lipkowski, P. Perkowski, M. Wójcicki;

„jednokrotni”:

A. Borowski, P. Gadziński, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, A. Nowogrodzki, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 321 zadaniach:

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	1 - 41,54
Zbigniew Galias	– Kraków	38,08
Aleksander Surma	– Myszków	3 - 37,60
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	34,55
Tomasz Rudny	– Warszawa	29,50
Tomasz Wietecha	– Tarnów	3 - 28,70
Artur Arciszewski	– Kielce	26,43
Grzegorz Miłoś	– Mielec	24,40
Marek Wójcicki	– Szczecin	2 - 19,84
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	15,76
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	4 - 15,17
Jacek Konieczny	– Poznań	12,31
Leszek Grzanka	– Chechło	9,98
Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	1 - 8,61
Marcin Misiak	– Poznań	8,16
Kazimierz Gryszko	– Gliwice	6,85
Piotr Ładyżyński	– Michalin	6,04

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1999–2001 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 6 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

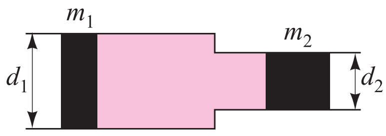
Klub 44

Zadania z fizyki nr 332, 333

Redaguje Jerzy B. BROJAN

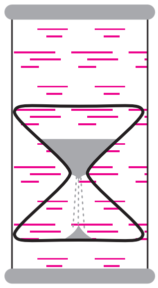
332. Rura składa się z odcinków o średnicach d_1 i d_2, w których mogą się poruszać bez tarcia tłoki o masach m_1 i m_2 (rys. 1). Początkowo drugi tłok był nieruchomy, a pierwszy poruszając się w prawo zaczął sprężać gaz. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby w pewnej chwili drugi tłok osiągnął energię kinetyczną równą początkowej energii pierwszego? Założyć, że przemiana gazu jest odwracalna.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2002



Rys. 1

333. Na rysunku 2 przedstawiony jest schemat pewnej zabawki fizycznej. Wewnątrz cylindra wypełnionego przezroczystą cieczą pływa szklana klepsydra z piaskiem. Początkowo klepsydra jest przy górnym końcu cylindra; zatem po jego obróceniu znajdzie się na dole i pozostaje tam, podczas gdy piasek w niej się przesypuje. Dopiero, gdy przesypie się około połowy piasku, klepsydra zaczyna powoli wypływać w górę. Dlaczego klepsydra początkowo pozostaje na dole i dlaczego zaczyna wypływać?


Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2001

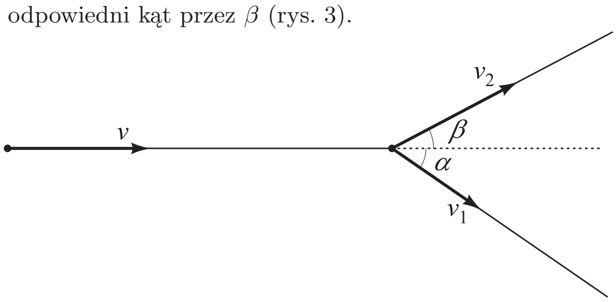
Przypominamy treść zadań:

324. Cząstka o masie m_1 zderzyła się ze spoczywającą cząstką o masie m_2, przy czym $m_1 > m_2$. Jaki jest maksymalny możliwy kąt odchylenia pierwszej cząstki od kierunku początkowego? Zakładamy, że prędkości cząstek są znacznie mniejsze od prędkości światła.

325. W oscyloskopie elektrony są przyspieszane napięciem $U = 300\,\mathrm{V}$, po czym biegną do ekranu oddalonego o $l = 30$ cm. Zakładamy, że oscyloskop nie ma żadnego ekranowania magnetycznego.

a) Oscyloskop umieszczono na równiku, gdzie pole magnetyczne ma kierunek poziomy, a jego indukcja wynosi $1{,}75 \cdot 10^{-5}$ T. Po jakim torze porusza się plamka na ekranie, jeśli oscyloskop powoli obracamy wokół osi pionowej? Podać wartości parametrów opisujących ten tor. Dane: ładunek elementarny wynosi $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, masa elektronu $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.
b) Jak zmieni się tor plamki, jeśli doświadczenie przeprowadzimy w miejscu, gdzie wektor indukcji ma wartość taką samą, jak podano wyżej, a jego kierunek tworzy kąt 60° z poziomem? Podać wartości parametrów toru.

324. Oznaczmy prędkość początkową pierwszej cząstki przez v, jej prędkość po zderzeniu przez v_1, kąt odchylenia przez α, prędkość drugiej cząstki po zderzeniu przez v_2, a odpowiedni kąt przez β (rys. 3).



Rys. 3

Z zasady zachowania pędu mamy równania

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta,$$
$$m_1 v_1 \sin\alpha = m_2 v_2 \sin\beta,$$

a z zasady zachowania energii – nierówność (która przechodzi w równość w przypadku zderzenia sprężystego)

$$m_1 v^2 \geq m_1 {v_1}^2 + m_2 {v_2}^2.$$

Możemy stąd znaleźć związek między kątem α a dowolną spośród zmiennych v_1, v_2 i β, a pozostałe dwie zmienne wyeliminować. Jeśli wyeliminujemy v_2 i β, to otrzymamy

$$(m_1 + m_2){v_1}^2 + (m_1 - m_2)v^2 \leq 2m_1 v v_1 \cos\alpha.$$

Widać, że maksymalna wartość α wystąpi w przypadku zderzenia sprężystego, a różniczkując funkcję $\cos\alpha(v_1)$ dochodzimy do wniosku, że będzie wtedy spełniony także warunek

$$v_1 = v\sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Rozwiązanie jest dane wzorem $\sin\alpha_{\max} = m_2/m_1$. Odnotujmy też, że gdy α jest maksymalne, to zachodzi związek $\alpha + 2\beta = 90°$.

325. a) Oznaczmy kąt między początkowym kierunkiem wiązki a polem przez θ. Siła działająca na elektrony ze strony pola magnetycznego jest skierowana pionowo, a jej wartość wynosi $F = evB\sin\theta$ (jak nietrudno sprawdzić, kąt odchylenia wiązki jest niewielki, zatem możemy też pominąć zmianę kierunku siły). Prędkość elektronów v wyznaczamy z bilansu energii, czyli z równania $(1/2)mv^2 = eU$, a dalej znajdujemy przesunięcie pionowe plamki

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{F}{2m}\left(\frac{l}{v}\right)^2 = \frac{eBl^2\sin\theta}{2mv} = \sqrt{\frac{e}{8mU}}Bl^2\sin\theta.$$

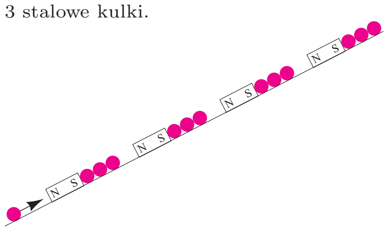
Podstawienie danych liczbowych daje wynik $y = 13{,}5\ \mathrm{mm} \cdot \sin\theta$. Zatem podczas jednostajnego obrotu oscyloskopu plamka będzie poruszała się wzdłuż osi pionowej ruchem harmonicznym z amplitudą 13,5 mm.


a) b)

b) Pozioma składowa wektora B ma obecnie dwukrotnie mniejszą wartość, a więc amplituda pionowego ruchu plamki zmaleje do 6,7 mm. Ponadto na wiązkę oddziaływać będzie pionowa składowa B, dając stałe (niezależne od ustawienia oscyloskopu) poziome przesunięcie plamki o wartości $13{,}5 \cdot \cos 30° = 11{,}7$ mm.

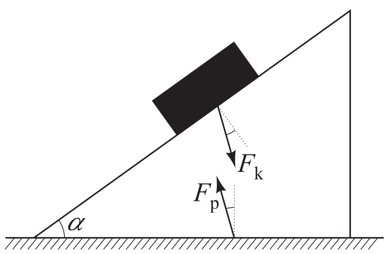
1. Podtrzymujemy palcem pionowy pręt i utrzymujemy go w pionie „balansując”, tzn. odpowiednio przesuwając palec. Załóżmy, że jeden koniec pręta jest grubszy (tzn. cięższy); czy nasze zadanie jest łatwiejsze, gdy grubszy koniec jest na górze, czy na dole?

2. W pochyłym korytku umieszczono kilka magnesów i do każdego doczepiono od strony górnego końca korytka 3 stalowe kulki.

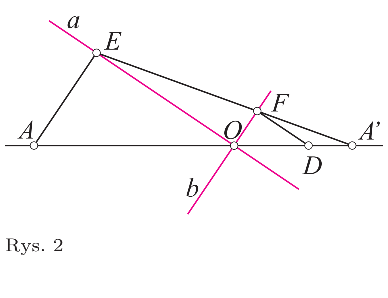


Następnie jeszcze jedną kulką lekko uderzono od dołu w najniższy magnes. Pod wpływem tego uderzenia ostatnia z kulek przy tym magnesie odskoczyła i uderzyła w drugi magnes itd. itd. Zaskakujące jest to, że w rezultacie kolejne kulki przeskakują w górę, choć początkowe uderzenie może być dość lekkie, energia nadana pierwszej kulce była niewielka. Skąd pochodzi więc energia grawitacyjna uzyskana przez następne kulki?

3. W dwóch jednakowych garnkach mamy jednakowe ilości wody – w pierwszym o temperaturze 20^oC, a w drugim – o temperaturze 0^oC. Temperatura otaczającego powietrza wynosi 20^oC. Stawiamy garnki na jednakowym małym ogniu i mierzymy zmiany temperatury z upływem czasu, aż oba będą gorące. Czy różnica temperatur będzie pozostawała równa 20^oC, czy będzie rosła, czy malała, czy początkowo rosła, a potem malała, czy na odwrót?



Rys. 1



Rys. 2

Po raz czwarty na warszawskim Festiwalu Nauki we wrześniu 2001 r. przeprowadzony został **Turniej Rozwiązywania Zadań z Fizyki**, któremu patronuje redakcja *Delty*. Niestety, tym razem liczba uczestników była mniejsza, niż poprzednio – być może, wskutek wybrania mniej dogodnego terminu. Pierwsze miejsce zdobył Robert Paciorek (ubiegłoroczny „srebrny medalista”), a dalsze miejsca zajęli: Wojciech Piasecki, Konrad Zakrzewski (ubiegłoroczny zwycięzca) i Nguyen Viet Dung. Wybrane zadania turniejowe zamieściliśmy obok.

A teraz omówienie niektórych zadań z ostatniego rocznika *Delty*:

Zadanie **302.** [Siła wzajemnego odpychania dwóch naładowanych, przylegających półkul] (współczynnik trudności $WT = 2{,}84$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 2$). Zamiast całkowania sił działających na poszczególne elementy półkuli można było postąpić podobnie jak przy obliczaniu siły parcia – przedstawić łączną siłę jako iloczyn pola przekroju πr^2 przez „ciśnienie”. Takie było rozwiązanie **A. Idzika**; ocenę powyżej 0,5 otrzymał jeszcze **K. Gryszko**.

Zadanie **311.** [Czy przewodnictwo cieplne danego materiału wynika z emisji i absorpcji promieniowania podczerwonego?] ($WT = 3{,}73$; $LPR = 1$) i zadanie **313** [Gdzie znika energia fali dźwiękowej, gdy gęstość gazu maleje do zera?] ($WT = 4{,}00$; $LPR = 0$). Niezbyt szczęśliwie wypadła próba włączenia do Ligi zadań polegających na wielostronnej analizie zjawisk fizycznych, bez postawienia problemu obliczeniowego. Zadania takie są bardzo odległe od tego, co zwykle nazywa się „zadaniem z fizyki” – z tego zapewne powodu wielu Czytelników było zdezorientowanych i „spasowało”. Tym większa chwała **M. Wójcickiemu**, który nie dał się zbić z tropu i nadesłał dobre rozwiązanie zadania 311.

Zadanie **312.** [Czy równia pochyła, na której położono ciężki klocek, ruszy z miejsca i z jakim przyspieszeniem?] ($WT = 2{,}13$; $LPR = 5$). Większość Czytelników rozwiązywała zadanie dla dowolnego stosunku mas klocka i równi, a następnie przechodziła do granicy $m_{\mathrm{kl}}/m_{\mathrm{rów}} \longrightarrow \infty$. Tak postąpili **A. Idzik**, **T. Wietecha** i **J. Piotrowski**, natomiast inną – czysto geometryczną i elegancką – metodę wybrał **P. Gadziński**. Oznaczmy przez $\overrightarrow{F_{\mathrm{k}}}$ i $\overrightarrow{F_{\mathrm{p}}}$ siły oddziaływania na równię ze strony klocka i podłoża (rysunek 1). Ponieważ masa równi jest pomijalnie mała, więc siły te muszą się równoważyć (leżą na tej samej prostej); z drugiej strony, kąt między siłą oddziaływania dwóch powierzchni a normalną do tej powierzchni nie może przekroczyć wartości $\operatorname{arctg} f$, gdzie f – współczynnik tarcia. Jeśli więc $\operatorname{arctg} f_1 + \operatorname{arctg} f_2 < \alpha$, to jedynymi siłami spełniającymi powyższe warunki są siły równe zeru, a to oznacza swobodny spadek klocka i ruch równi z przyspieszeniem $a = \mathrm{g}\operatorname{ctg}\alpha$. Jeśli powyższa nierówność nie jest spełniona, to co najmniej jeden z kątów między $\overrightarrow{F_{\mathrm{k}}}$ lub $\overrightarrow{F_{\mathrm{p}}}$ a normalną do odpowiedniej powierzchni jest mniejszy od maksymalnego, co oznacza brak poślizgu, czyli równia jest wtedy nieruchoma. Piąte dobre rozwiązanie – **M. Wójcicki**.

Zadanie **315.** [Z oporników i diod zbudować obwód o danej charakterystyce prądowo–napięciowej] ($WT = 1{,}84$; $LPR = 4$). Szukany obwód miał być „jak najprostszy”, co można było różnie interpretować. Redagujący Ligę uznał, że należy użyć jak najmniejszej liczby elementów i małostkowo potrącał z oceny 0,1 za każdy element powyżej siedmiu. Według takiego kryterium najlepszym okazało się rozwiązanie **T. Wietechy**, a dalej ex aequo **A. Nowogrodzkiego** i **A. Idzika** oraz **M. Wójcickiego**.

Zadanie **316.** [Odchylenie wahadła Foucaulta od pionu] ($WT = 2{,}50$; $LPR = 2$). Do podanego w *Delcie* wyniku wkradła się pomyłka rachunkowa – prawidłowy wynik to 0,087 mm.

Zadanie **317.** [Dlaczego w atmosferze Ziemi jest więcej argonu niż neonu?] ($WT = 2{,}44$; $LPR = 2$). Tu błąd w rozwiązaniu firmowym był nieco poważniejszy – izotop ^{40}Ar powstaje z ^{40}K wskutek wychwytu elektronu, a nie rozpadu β^+. Dokładne dane na temat kanałów rozpadu ^{40}K wyszukał **J. Piotrowski**, a ocenę powyżej 0,5 otrzymał jeszcze **A. Idzik**.

Zadanie **320.** [Wyznaczyć położenie ognisk soczewki, gdy dane jest położenie obrazów A' i B' dwóch danych punktów A i B] ($WT = 2{,}50$; $LPR = 4$). Nieznacznie zmieniona w porównaniu z rozwiązaniem firmowym była konstrukcja następująca: po wyznaczeniu środka soczewki i osi optycznej metodą podaną w *Delcie* prowadzimy z punktu A promień równoległy do osi optycznej. Po załamaniu promień ten trafi do A', przedtem jednak przetnie oś optyczną, a w punkcie przecięcia leży ognisko. Takie rozwiązania przysłali **A. Idzik**, **L. Grzanka** i (w nieco innym wariancie) **T. Wietecha**, natomiast całkowicie odmienne i bardzo oryginalne było czwarte dobre rozwiązanie, którego autorem jest **P. Gadziński**. Oto ono: Po wyznaczeniu standardową metodą (tzn. jako przecięcie prostych AA' i BB') środka soczewki O rysujemy dowolne dwie proste a i b wzajemnie prostopadłe i krzyżujące się w O (rysunek 2). Jeśli jedną z tych prostych uznamy za oś soczewki, a drugą za oś optyczną, to możemy narysować promień AE biegnący z A równolegle do osi i tak samo, jak w opisanej wyżej metodzie, wyznaczyć „ognisko” F (cudzysłów wynika z dowolności wyboru prostych a i b, czyli punkt ten na ogół nie pokrywa się z ogniskiem). Poprowadźmy teraz z F prostopadłą do osi, która przetnie prostą AA' w punkcie D. Kluczowym punktem rozwiązania jest prosty rachunek, z którego wynika, że położenie punktu D nie zależy od wyboru a i b. Jeśli więc wyznaczymy punkt D, to – ponieważ kąt OFD jest prosty – możemy być pewni, że ognisko leży na okręgu, którego średnicą jest OD. Powtarzając tę samą konstrukcję dla punktów B i B' otrzymujemy nowy okrąg, a ostatecznie ognisko leży w jednym z punktów przecięcia tych okręgów (pomińmy już kwestię, w którym).

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2002

Zadania z matematyki nr 435, 436

Redaguje Marcin E. KUCZMA

435. Rozważamy słowa binarne, tj. ciągi zerojedynkowe (dowolnej długości skończonej). Słowo powstałe przez napisanie pod rząd trzech identycznych kopii dowolnego słowa binarnego będziemy nazywać *trójniakiem* (przykład: 010101).

Określamy operacje dopuszczalne. Każda taka operacja polega na rozerwaniu słowa w dowolnym miejscu i wstawieniu w powstałą lukę dowolnego trójniaka (także dopisanie trójniaka na początku lub na końcu słowa), bądź też na wykreśleniu dowolnego fragmentu będącego trójniakiem. Startujemy od słowa 01 i wykonujemy ciąg operacji dopuszczalnych. Czy jest możliwe uzyskanie słowa 10 ?

436. Znaleźć wszystkie funkcje różniczkowalne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie
$$f(2x) = f(x) + xf'(2x) \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2001

Przypominamy treść zadań:

427. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n \cos^2 x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Znaleźć wykładnik p, dla którego ciąg $(n^p x_n)$ ma granicę dodatnią, skończoną, i obliczyć tę granicę.

428. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$. Dla dowolnego niepustego zbioru $J \subset \{1, \ldots, n\}$ oznaczmy przez s_J sumę wszystkich liczb a_j o numerach $j \in J$. Udowodnić, że
$$\sum_J s_J^2 \le (n+1)2^{n-2} \sum_{j=1}^n a_j^2$$
(symbol J w pierwszym sumowaniu przebiega rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$).

427. Ciąg (x_n) jest malejący, a jego wyrazy są liczbami dodatnimi, więc istnieje granica $\lambda = \lim x_n \in \langle 0; 1\rangle$. Dana zależność rekurencyjna daje w granicy równanie $\lambda = \lambda \cos^2 \lambda$, którego jedynym rozwiązaniem w przedziale $\langle 0; 1\rangle$ jest $\lambda = 0$. Zatem ciąg (x_n) jest zbieżny do zera.

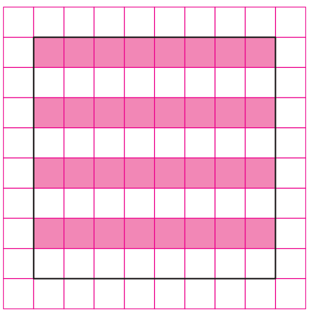
Określamy pomocniczy ciąg (a_n) o wyrazach $a_n = \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}$ i obliczamy jego granicę:
$$a_n = \frac{x_n^2 - x_{n+1}^2}{x_n^2 x_{n+1}^2} = \frac{x_n^2(1-\cos^4 x_n)}{x_n^4 \cos^4 x_n} = \\ = \left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^2 \cdot \frac{1+\cos^2 x_n}{\cos^4 x_n} \longrightarrow 2.$$

Tworzymy ciąg, którego wyrazami są średnie arytmetyczne początkowych odcinków ciągu (a_n); jest on (w myśl znanego twierdzenia) także zbieżny do granicy 2:
$$\frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_0^2}\right) = \\ = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_n^2} - 1\right) = \frac{1-x_n^2}{nx_n^2} \longrightarrow 2.$$

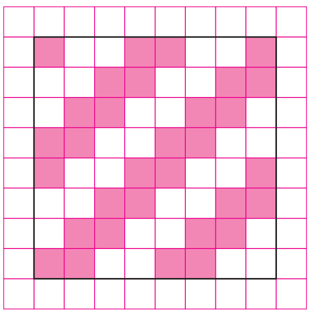
Licznik ostatniego ułamka dąży do 1, więc mianownik nx_n^2 musi dążyć do $1/2$. Tak więc $n^{1/2} \cdot x_n \to 1/\sqrt{2}$. To znaczy, że ciąg postaci $(n^p x_n)$ ma granicę dodatnią, skończoną jedynie dla wykładnika $p = 1/2$; granica ta wynosi $1/\sqrt{2}$.

428. Ustalmy liczbę naturalną $k \le n$. Dla każdego k-elementowego zbioru wskaźników $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ zachodzi nierówność Cauchy'ego–Schwarza:
$$s_J^2 = (1 \cdot a_{j_1} + \ldots + 1 \cdot a_{j_k})^2 \le k(a_{j_1}^2 + \ldots + a_{j_k}^2).$$
Dodajemy tak otrzymane nierówności dla wszystkich k-elementowych zbiorów J; po prawej stronie pojawi się suma kwadratów wszystkich liczb a_j, przy czym każda z nich wystąpi $\binom{n-1}{k-1}$ razy (bo tyle jest sposobów uzupełnienia ustalonego numeru j do k-elementowego zbioru J). Zatem
$$\sum_{J\colon |J|=k} s_J^2 \le k\binom{n-1}{k-1} \sum_{j=1}^n a_j^2.$$
Biorąc wszystkie możliwe wartości k dostajemy nierówność
$$\sum_J s_J^2 \le C \cdot \sum_{j=1}^n a_j^2,$$
gdzie
$$C = \sum_{k=1}^n k\binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=2}^n (k-1)\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \\ = \sum_{k=2}^n (n-1)\binom{n-2}{k-2} + 2^{n-1} = (n-1)\cdot 2^{n-2} + 2^{n-1} = \\ = (n+1)\cdot 2^{n-2}.$$
Daje to tezę zadania.

Rozwiązanie zadania M 980.
Nie. Pokolorujmy szachownicę tak jak na rysunku obok. Klocek typu B pokrywa dwa pola białe i dwa czarne, natomiast każdy klocek typu A pokrywa nieparzystą liczbę pól każdego rodzaju. W sumie 15 klocków typu A i jeden typu B pokrywałyby więc nieparzystą liczbę pól białych. Sprzeczność.



Rys. 4



Rys. 5

Rozwiązanie zadania M 981.
Nie. Pokolorujmy szachownicę jak na rysunku obok. Każdy klocek typu C i D pokrywa parzystą liczbę pól czarnych oraz białych, a klocek typu B pokrywa nieparzystą liczbę pól czarnych i białych. Z istnienia pokrycia wynikałoby, że liczba pól każdego koloru jest nieparzysta.

Czas na omówienie sezonu ligowego 2000/2001.

Który to już z kolei? Dwudziesty. Tak; liga matematyczna wystartowała 20 lat temu. W numerze 9/1981 ukazały się zadania nr 1, 2, 3. Jak zwykle, gdy liczba lat kończy się zerem, daje to okazję do jubileuszu, skłania do spojrzenia wstecz.

Sezon ligowy odpowiada w zasadzie rokowi szkolnemu. Kolejne sezony oddziela dwumiesięczna przerwa. Obecnie są to numery 7 i 8, ale w dawniejszych latach bywały to czasami inne dwa miesiące. Potężne zakłócenie miało miejsce w sezonie 1989/90, gdy los *Delty* był mocno niepewny: numery 11/1989–3/1990 w ogóle się nie ukazały, a przerwa „wakacyjna” została przesunięta do numerów 11 i 12.

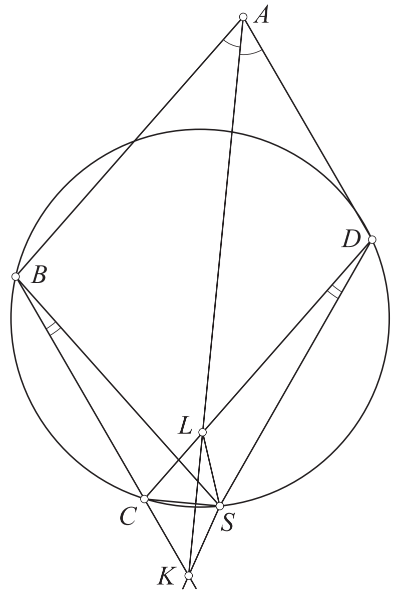
Przez pierwsze trzy i pół roku mieliśmy po trzy zadania w numerze. Potem do matematyki dołączyła fizyka i od stycznia 1985 zaczęliśmy zamieszczać po dwa zadania z każdej z tych dwóch dziedzin.

Oto mała statystyka – w rozbiciu na sezony ligowe. W kolejnych kolumnach mamy:
– (w nawiasie) liczbę zadań z matematyki w sezonie;
– liczbę nowych uczestników ligi;
– (grubą czcionką) liczbę nowych członków **Klubu 44 M**;
– liczbę przekroczeń bariery „44 punkty” (różni się od poprzedniej tym, że liczone są przekroczenia powtórne i wszystkie dalsze);

1981/82	(24)	75	**0**	0	1991/92	(20)	12	**3**	5
1982/83	(33)	96	**9**	11	1992/93	(20)	13	**3**	9
1983/84	(30)	99	**17**	26	1993/94	(20)	21	**4**	8
1984/85	(25)	54	**11**	18	1994/95	(20)	14	**1**	4
1985/86	(20)	55	**7**	14	1995/96	(22)	15	**3**	7
1986/87	(20)	51	**6**	16	1996/97	(20)	13	**4**	9
1987/88	(20)	21	**6**	10	1997/98	(20)	6	**1**	3
1988/89	(20)	31	**3**	8	1998/99	(20)	9	**4**	7
1989/90	(20)	11	**4**	8	1999/00	(20)	8	**4**	8
1990/91	(10)	13	**3**	3	2000/01	(20)	11	**2**	10

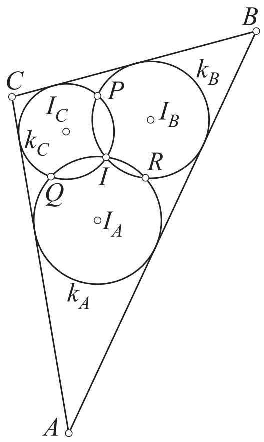
Suma liczb z przedostatniej kolumny, równa 95, to aktualna liczba członków **Klubu 44 M**; niedaleko do setki. Suma liczb z jeszcze poprzedniej kolumny – to łączna liczba wszystkich uczestników, którzy pojawili się w lidze (do momentu zamknięcia sezonu 2000/01); wynosi ona 628. Trzy czwarte spośród tych nazwisk pojawiło się już w pierwszych siedmiu latach życia ligi. Potem widać spadek zainteresowania. Zbiega się to z okresem Wielkich Przemian w naszym kraju; starsi Czytelnicy dobrze wiedzą, o czym mowa. Mniej czasu można było przeznaczać na beztroską zabawę (którą nasza liga zawsze pragnęła być i pragnie pozostać). Ale w końcowych wierszach widać jakby drgnięcie w górę. Może kolejni Czytelnicy spróbują dołączyć do zabawy? Bardzo zachęcamy.

Przechodzimy do omówienia zadań; jak zwykle, przedstawiamy rozwiązania ciekawsze od „firmowych”, komentarze i uogólnienia oraz odnotowujemy te zadania, gdzie poprawne rozwiązania były nieliczne.



Rys. 1

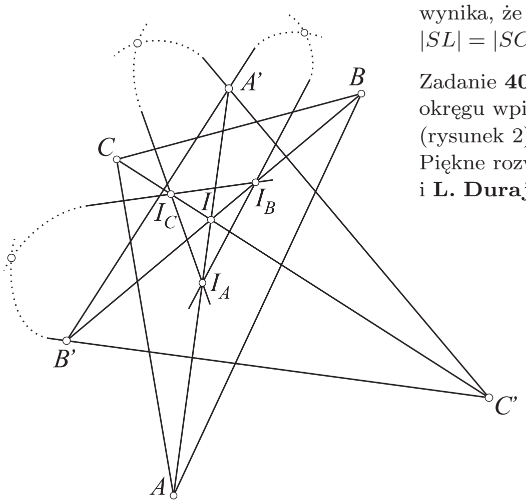
Zadanie **402.** [$ABCD$ – równoległobok; K i L – punkty przecięcia prostych BC i CD z dwusieczną kąta DAB $\Rightarrow$ środek okręgu (CKL) leży na okręgu (BCD)] (współczynnik trudności WT=1,71; liczba poprawnych rozwiązań LPR=13). Niezbyt trudne; sporo dobrych rozwiązań – w większości podobnych do firmowego. Na ich tle wyróżnia się prostotą rozwiązanie, które podał **W. Bednorz** (rysunek 1): Niech S będzie środkiem tego łuku BD okręgu (BCD), na którym leży punkt C. Z równości $|SD| = |SB|$, $|\angle SDL| = |\angle SDC| = |\angle SBC| = |\angle SBK|$ oraz $|DL| = |AD| = |BC|$ i $|BK| = |AB| = |DC|$ wynika, że trójkąt SDL przystaje do SBC, a trójkąt SBK przystaje do SDC. Zatem $|SL| = |SC| = |SK|$; a to znaczy, że S (punkt okręgu (BCD)) jest środkiem okręgu (CKL).



Rys. 2

Zadanie **405.** [$\triangle ABC$ nierównoramienny; okręgi k_A, k_B, k_C, przechodzące przez środek okręgu wpisanego, styczne do par boków, przecinają się parami w punktach P, Q, R (rysunek 2) $\Rightarrow$ środki okręgów (AIP), (BIQ), (CIR) są współliniowe] ($WT = 3{,}26$; $LPR = 6$.) Piękne rozwiązanie, odwołujące się do twierdzenia Desarguesa, przedstawili **M. Adamaszek** i **L. Duraj**: proste symetralne odcinków AI, BI, CI wyznaczają trójkąt $A'B'C'$, którego wierzchołki leżą na przedłużeniach tych odcinków (uzasadnienie – ciekawe i niezbyt trudne zadanie dla Czytelnika); środki I_A, I_B, I_C okręgów k_A, k_B, k_C leżą na tych odcinkach; I jest punktem perspektywicznym pary trójkątów $A'B'C'$ i $I_AI_BI_C$, które wobec tego mają także oś perspektywiczną, przechodzącą przez punkty przecięcia par prostych: $B'C' \cap I_BI_C$, $C'A' \cap I_CI_A$, $A'B' \cap I_AI_B$ (rysunek 3) – a te trzy punkty to środki okręgów (AIP), (BIQ), (CIR). Podobne rozwiązanie, choć z pomyłkami, podał **P. Sulich**.

W. Bednorz oraz **J. Gismatullin** rozwiązali zadanie stosując twierdzenie Menelausa (faktycznie dowodząc po drodze twierdzenia Desarguesa, bez używania jego nazwy), a **M. Peczarski** zastosował inwersję względem punktu I, jak w rozwiązaniu firmowym.



Rys. 3

Weterani **Klubu 44 M**
(w kolejności uzyskiwania
statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (4), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (6), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (5), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (4), T. Józefczyk, J. Witkowski, W. Bednorz

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie **Klubu 44 M**
(alfabetycznie):

„dwukrotni”:

Z. Bartold, A. Czornik, B. Dyda, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, P. Kubit, K. Patkowski, M. Peczarski, K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”:

M. Adamaszek, W. Bednarek, T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Daniluk, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **423** (WT=2,60) i **424** (WT=1,25)
z numeru 6/2001

Marcin Peczarski	–	1 - 47,43
Krzysztof Zapisek	–	42,22
Witold Bednarek	–	1 - 41,46
Tomasz Wietecha	–	4 - 40,76
Michał Adamaszek	–	1 - 40,64
Jerzy Cisło	–	38,66
Andrzej Jóźwik	–	37,72
Jacek Klisowski	–	36,96
Zbigniew Galias	–	1 - 35,12
Wojciech Maciak	–	34,30
Marian Łupieżowiec	–	34,24
Tomasz Rawlik	–	4 - 32,65
Krzysztof Jasek	–	32,63
Artur Arciszewski	–	32,53
Nikodem Szpak	–	32,27
Światosław Gal	–	30,94
Zbigniew Sewartowski	–	29,55
Marcin Kasperski	–	2 - 28,02
Monika Nagórko	–	24,70
Lech Duraj	–	23,79
Andrzej Nagórko	–	23,40
Paweł Walter	–	23,40
Łukasz Kamiński	–	22,98

Legenda (przykładowo):

stan konta 4-40,76 oznacza, że uczestnik już czterokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (piątej) rundzie ma 40,76 punktów.

Marcin Peczarski kończy drugą czterdziestoczteropunktową rundę.

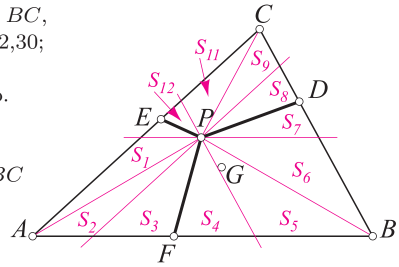
Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;

– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1999, 2000 lub 2001.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Zadanie **408.** [$P \in \triangle ABC$ o środku ciężkości G; $PD \| AG$, $PE \| BG$, $PF \| CG$ (D, E, F na bokach BC, CA, AB); $S_{PAF} + S_{PBD} + S_{PCE} = ?$] ($WT = 2{,}30$; $LPR = 13$). Raczej łatwe; prawie wszystkie przysłane rozwiązania zgrabniejsze od firmowego. Urodą urzeka rozwiązanie **W. Bednorza** (starogreckie „patrz”; rysunek 4): prowadzimy przez punkt P proste równoległe do boków $\triangle ABC$ – odcinki PD, PE, PF są środkowymi w małych trójkątach podobnych (do ABC), więc $S_3 = S_4$, $S_7 = S_8$, $S_{11} = S_{12}$; oczywiście $S_1 = S_2$, $S_5 = S_6$, $S_9 = S_{10}$, zatem ostatecznie $(S_2 + S_3) + (S_6 + S_7) + (S_{10} + S_{11}) = \frac{1}{2} S_{ABC}$.



Rys. 4

Zadanie **409.**[Sześcian K zbudowany z klocków $K_1, \ldots, K_{2000}$ o rozmiarach $2 \times 2 \times 1 \Rightarrow$ istnieje prosta przecinająca wnętrze K, nieprzecinająca wnętrza żadnego K_i] ($WT = 2{,}13$; $LPR = 10$). Pisze **Bartek Dyda**: *Mam wrażenie, że w treści zadania miał być jeszcze warunek równoległości tej prostej do którejś krawędzi.* Wrażenie ze wszech miar słuszne, panie Bartku! Warunek równoległości, naturalny i oczywisty, zarówno dla redaktora ligi, który nie zauważył braku owego warunku, jak również dla wielu rozwiązujących, którzy go „oczami duszy” ujrzeli i podświadomie do zadania dołączyli. Tak utrudnione zadanie (powtórzmy – zgodne z intencją redaktora) rozwiązali **M. Adamaszek**, **W. Bednorz**, **P. Gadziński**, **K. Patkowski**, **M. Peczarski**, **P. Walter**; metoda jak w rozwiązaniu firmowym.

Jednak zadanie w podanym brzmieniu treści dopuszczało dowolne położenie prostej. Skoro tak, to wystarczy ją ukośnie wsunąć między dwa sąsiadujące klocki, przecinając wnętrze sześcianu K na krótkim odcinku w pobliżu którejś krawędzi; takie banalne rozwiązanie oczywiście także otrzymywało ocenę maksymalną.

Zadanie **413.** [$c > 2b > 4a > 0 \Rightarrow \exists \lambda > 0$: $\{\lambda a\}, \{\lambda b\}, \{\lambda c\} \in (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$] ($WT = 2{,}40$; $LPR = 7$). Autorzy dobrych rozwiązań: **M. Peczarski**, **P. Walter**, **T. Wietecha**, **A. Woryna**, **P. Kumor**, **P. Gadziński**, **W. Bednorz**; rozwiązania izomorficzne z firmowym lub bardziej zawiłe.

Zadanie **416.** [Funkcja $f\colon \mathbb{Z}^3_+ \to \mathbb{R}$ spełnia warunki: ($xyz = 0 \Rightarrow f(x, y, z) = 0$) oraz ($P \in \mathbb{Z}^3_+$, $P_i \in \mathbb{Z}^3_+$ ($i = 1, \ldots, 6$) – różne punkty, $|PP_i| = \sqrt{2} \Rightarrow f(P) = 1 + \sum f(P_i)$); wyznaczyć f] ($WT = 2{,}27$; $LPR = 9$). Wszystkie rozwiązania podobne do firmowego: dowód, że istnieje co najwyżej jedna taka funkcja oraz odgadnięcie (ewentualnie poparte jakimiś motywami heurystycznymi) wzoru $f(x, y, z) = 3xyz/(x + y + z)$. **Lech Duraj** opatrzył to rozwiązanie następującą ciekawą uwagą: z punktu $P \in \mathbb{Z}^3_+$ rozpoczynamy błądzenie losowe, w każdym kroku przemieszczając się o odcinek długości $\sqrt{2}$; wówczas $f(P)$ jest wartością oczekiwaną czasu dojścia do jednej z płaszczyzn $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Zadanie **417.** [Maksymalizacja sumy $\sum_{i=1}^{2n} |\pi(i) - i|$ dla permutacji π zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$; ile permutacji daje to maksimum?] ($WT = 1{,}42$; $LPR = 22$). Wynik: maksimum$= 2n^2$ osiągane dla $(n!)^2$ permutacji – tych, które odwzorowują zbiór $\{1, \ldots, n\}$ na $\{n{+}1, \ldots, 2n\}$ i na odwrót.

Zadanie nietrudne, jak wynika z wartości WT. Aby je wzbogacić, **M. Peczarski** zbadał analogiczne zagadnienie dla permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n{+}1\}$, uzyskując wynik: maksimum$= 2n(n + 1)$ osiągane dla $(2n{+}1)(n!)^2$ permutacji – tych, które spełniają jeden z warunków (1), (2), (3) (oznaczenia: $A = \{1, \ldots, n\}$, $m = n{+}1$, $B = \{n{+}2, \ldots, 2n{+}1\}$):

(1) $A \to B$, $B \to A$, $m \mapsto m$;

(2) $\exists\, a \in A,\ b \in B$: $A \setminus \{a\} \to B \setminus \{b\}$, $B \to A$, $a \mapsto m \mapsto b$;

(3) $\exists\, a \in A,\ b \in B$: $A \to B$, $B \setminus \{b\} \to A \setminus \{a\}$, $b \mapsto m \mapsto a$.

Trochę szkoda, że zadanie dotyczyło tylko zbiorów o liczności parzystej.

Zadanie **421.** [$A = \{1, \ldots, n\}$; ile jest funkcji $f\colon A \to A$: $f^{n-2} = \text{const}$, $f^{n-3} \neq \text{const}$?] ($WT = 2{,}12$; $LPR = 11$). Ogólniej, można dla każdego $k \le n$ pytać o liczbę funkcji $f\colon A \to A$ spełniających warunki $f^k = \text{const}$, $f^{k-1} \neq \text{const}$. **M. Peczarski** numerycznie wyznaczył owe wartości dla wszystkich par $k \le n \le 5$. **A. Woryna** wyprowadził wzór ogólny w postaci wielowskaźnikowej sumy: rozważana liczba wynosi $n! \sum s_1^{s_2} s_2^{s_3} \ldots s_{k-1}^{s_k} (s_1! s_2! \ldots s_k!)^{-1}$; sumowanie po wszystkich układach $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ dodatnich liczb całkowitych, których suma jest równa $n - 1$. Ciekawe, czy to się da „zwinąć” – może ktoś z Czytelników potrafi coś powiedzieć na ten temat?

Zadanie **422.** [$a_n = \prod_{k=1}^{2^n-1} \sin 2^{-n} k\pi$; $\lambda = \lim a_n^{2^{-n}} = ?$] ($WT = 1{,}09$; $LPR = 19$). Zadanie, jak widać, łatwe, ale ciekawe dzięki dość istotnie różniącym się sposobom rozwiązania. **B. Dyda**, **P. Gadziński**, **W. Bednorz**, **P. Sołtan** zauważyli, że liczba $\ln(a_n^{2^{-n}})$ jest sumą całkową funkcji $f(x) = \ln(\sin \pi x)$ na przedziale $(0; 1)$, odpowiadającą podziałowi na 2^n równych części; w granicy dostajemy prostą do obliczenia całkę $\int_0^1 f(x)dx = -\ln 2$; stąd $\lambda = \frac{1}{2}$. **J. Cisło**, **J. Olszewski**, **A. Woryna** wykazali, że dla każdej liczby naturalnej m zachodzi tożsamość $\prod_{k=1}^{m-1} \sin(k\pi/m) = 2^{1-m} m$ (badając wielomian $z^m - 1$ i jego rozkład na czynniki liniowe); ta tożsamość natychmiast daje wynik $\lambda = \frac{1}{2}$. Pozostali autorzy przysłali rozwiązania podobne do firmowego.