3/02 (51)

Γ lim_{n→∞} atias

O RÓWNYCH SUMACH DWÓCH SZEŚCIANÓW

O tym, że dwie sumy dwóch sześcianów mogą być równe, łatwo się przekonać. Mamy bowiem

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3.$$

Znalezienie trzech równych sum dwóch sześcianów przez bezpośrednie przeszukiwanie wymaga już użycia komputera. Pierwszy przykład, który znajdujemy, jest następujący

$$87539319 = 414^3 + 255^3 = 423^3 + 228^3 = 436^3 + 167^3.$$

Okazuje się jednak, że podobnie jak dla kwadratów, istnieją liczby mające dowolnie wiele rozkładów na sumę dwóch sześcianów liczb całkowitych dodatnich.

U podstaw tego faktu leży tożsamość $x^3 + y^3 = X^3 + Y^3$, gdzie

$$X = \frac{x^4 + 2\,x\,y^3}{x^3 - y^3} \quad \text{i} \quad Y = \frac{-2\,x^3\,y - y^4}{x^3 - y^3}. \tag{33}$$

Z tożsamości tej wynika, że liczba będąca sumą dwóch sześcianów daje się przedstawić jako suma dwóch sześcianów także w inny sposób.

Wychodząc z jakiegokolwiek przedstawienia $x^3 + y^3$ i iterując powyższą operację uzyskiwania z niego nowego przedstawienia $X^3 + Y^3$, otrzymujemy nieskończony ciąg przedstawień liczby w postaci sumy dwóch sześcianów, ale **uwaga**, są tu pewne potencjalne problemy:

1. Problem nieistotny: przedstawiamy liczbę w postaci sumy sześcianów liczb wymiernych. Żaden problem – biorąc skończenie wiele takich przedstawień, możemy wymnożyć je przez najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników i już mamy liczby całkowite.

2. Problem znaków: niestety, w otrzymanych przedstawieniach będą występować także liczby ujemne. Można jednak udowodnić, że da się wybrać dowolnie wiele przedstawień z liczbami dodatnimi.

3. Problem zapętlenia: a może po jakimś czasie wrócimy do wyjściowego przedstawienia i w rezultacie przedstawień będzie skończenie wiele. I tu można udowodnić, że nic takiego się nie zdarzy.

Dla przykładu zacznijmy od $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ i twórzmy kolejne pary (x_n, y_n) według wzoru (33). Otrzymamy:

$$(x_2, y_2) = \left(-\tfrac{17}{7}, \tfrac{20}{7}\right), \qquad (x_3, y_3) = \left(\tfrac{188479}{90391}, -\tfrac{36520}{90391}\right),$$

$$(x_4, y_4) = \left(\tfrac{1243617733990094836481}{609623835676137297449}, \tfrac{487267171714352336560}{609623835676137297449}\right),$$

z których to par liczb bierzemy tylko ostatnią, bo w poprzednich dwóch występują liczby ujemne. Para (x_n, y_n) składa się z liczb dodatnich także dla $n = 6, 8, 15, 17, 19, 23, 25, \ldots$

Jednak liczby, które w ten sposób uzyskamy, będą ogromne, np. para (x_6, y_6) ma mianownik 338-cyfrowy, a para (x_8, y_8) 5405-cyfrowy.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (29)

Twierdzenie (nierówność Minkowskiego): Dla dowolnych ciągów liczb rzeczywistych (a_n), (b_n), dla których sumy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ są skończone, zachodzi nierówność:

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}\,.$$

Dowód: Najpierw udowodnimy następujący
Lemat (nierówność Cauchy'ego): Dla dowolnych ciągów liczb rzeczywistych (a_n), (b_n), dla których sumy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ są skończone, zachodzi nierówność:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}\,.$$

Dowód lematu: Niech $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ i $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$.
Wówczas podstawiając $x = \frac{a_n}{A}$ i $y = \frac{b_n}{B}$ w nierówności $xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$, otrzymujemy

$$\frac{a_n b_n}{AB} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a_n^2}{A^2} + \frac{b_n^2}{B^2}\right),$$

co wysumowane po wszystkich n daje

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n}{AB} \le \frac{1}{2}\left(\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2}{A^2} + \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2}{B^2}\right) = 1,$$

skąd $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n \le AB = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2}$, co kończy dowód lematu.

Przechodzimy teraz do dowodu nierówności Minkowskiego. Stosując nierówność Cauchy'ego do każdej sumy po prawej stronie równości

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(a_n + b_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(a_n + b_n),$$

otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2 \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2},$$

skąd po podzieleniu stronami przez $\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2}$

dostajemy $\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2} \le \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2} + \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2}$.

Dowód nierówności Minkowskiego jest więc zakończony.

Powyższy dowód jest *z grubsza* poprawny. Jakie zawiera usterki i jak je naprawić?
Zobacz za miesiąc, czy dostrzegłeś wszystkie.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl