O pewnym zadaniu Sierpińskiego

Witold BEDNAREK

W książeczce Wacława Sierpińskiego „250 zadań z elementarnej teorii liczb” (Warszawa 1987, WSiP) znajduje się następujące zadanie (nr 125, str. 18):

„Dowieść, że wszystkie liczby

$$2^{2^{2n+1}}+3,\quad 2^{2^{4n+1}}+7,\quad 2^{2^{6n+2}}+13,\quad 2^{2^{10n+1}}+19,\quad 2^{2^{6n+2}}+21$$

są złożone dla $n=1,2,\ldots$”

W podanym rozwiązaniu pokazane jest, że każda z rozważanych liczb, niezależnie od n, jest podzielna przez dobraną liczbę pierwszą, odpowiednio: $7, 11, 29, 23, 37$. Zauważmy, że są to wartości podanych wyrażeń dla $n=0$.

W niniejszym artykule wykażemy następujące

W przypadku $M=0$ liczby

$$2^{2^m}+M=2^{2^m}$$

mają tylko dzielnik pierwszy $p=2$. Natomiast w przypadku $M=1$ mamy liczby postaci

$$2^{2^m}+1,$$

o których wiadomo, że są parami względnie pierwsze.

Twierdzenie. Jeżeli M jest liczbą całkowitą różną od 0 i 1, to istnieje liczba pierwsza $p>2$ i liczby naturalne d i e takie, że

$$p|2^{2^{dn+e}}+M \quad \text{dla } \ n=0,1,2\ldots$$

Najpierw udowodnimy

Lemat. Niech s będzie nieparzystą liczbą naturalną, a d – liczbą naturalną, dla której $s|2^d-1$ (liczba taka zawsze istnieje). Ponadto niech $p=s\cdot 2^l+1$ będzie liczbą pierwszą, e, l – liczbami naturalnymi $e\geq l\geq 1$, M – liczbą całkowitą. Wówczas

$$p|2^{2^{dn+e}}+M \iff p|2^{2^e}+M.$$

Dowód lematu. Wystarczy udowodnić, że

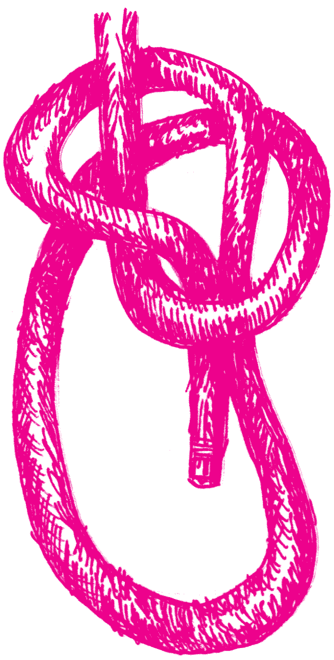
$$p|2^{2^{dn+e}}-2^{2^e}.$$

W tym celu będziemy wielokrotnie wykorzystywać podzielność $a-1|a^n-1$. Mamy $s|2^d-1|2^{dn}-1$, a więc $2^{dn}-1=ks$. Ponadto

$$p|2^{p-1}-1=2^{s\cdot 2^l}-1|2^{ks\cdot 2^l 2^{e-l}}-1=2^{ks\cdot 2^e}-1|2^{2^e}(2^{ks\cdot 2^e}-1)=$$
$$=2^{2^e(ks+1)}-2^{2^e}=2^{2^{dn+e}}-2^{2^e}$$

(pierwsza podzielność wynika z małego twierdzenia Fermata).

Dowód twierdzenia. Niech M będzie liczbą całkowitą różną od 0 i 1. W świetle naszych rozważań, wystarczy wykazać, że istnieje taka liczba naturalna e, że dla pewnej liczby pierwszej $p=s\cdot 2^l+1$, gdzie s jest nieparzyste i $l\leq e$, mamy $p|2^{2^e}+M$. Oznaczmy $M=w\cdot 2^K$, gdzie w jest nieparzyste i K – całkowite nieujemne. Można tak dobrać $e_1, e_2\in N$, aby $2^{e_2}>K$ i $2^{2^{e_1}}+M>2^K$. Niech $e_0=\max(e_1,e_2)$. Wówczas dla każdego $e\geq e_0$ mamy



$$2^{2^e}+M=2^{2^e}+w\cdot 2^K=2^K(2^{2^e-K}+w)$$

i czynnik w nawiasie jest liczbą większą od 1. Zatem dla każdego $e\geq e_0$ liczba $2^{2^e}+M$ ma dzielnik pierwszy nieparzysty.

Załóżmy teraz wbrew temu, co mamy udowodnić, że dla każdego $e\geq e_0$ każda liczba pierwsza nieparzysta dzieląca $2^{2^e}+M$ jest postaci $t\cdot 2^{l_e}+1$, gdzie $t, l_e\in N$ i $l_e\geq e+1$. Ponieważ iloczyn liczb postaci $t\cdot 2^{l_e}+1$ jest liczbą tej postaci, więc

$$2^{2^e}+M=2^K(t\cdot 2^{l_e}+1)$$

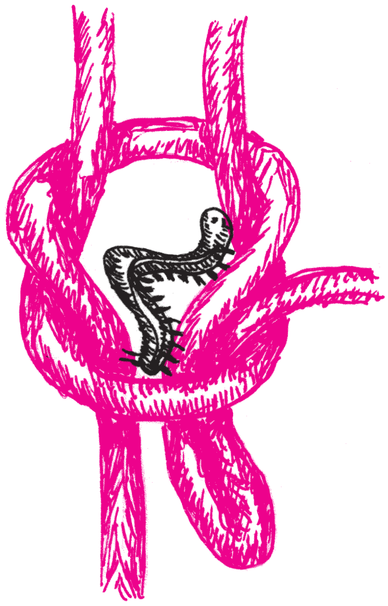
i analogicznie

$$2^{2^{e+1}}+M=2^K(u\cdot 2^{l_{e+1}}+1),$$

gdzie $u\in N$ i $l_{e+1}\geq e+2$.

Mamy

$$2^K(u\cdot 2^{l_{e+1}}+1)=2^{2^{e+1}}+M=(2^K(t\cdot 2^{l_e}+1)-M)^2+M.$$



Ponieważ $l_e, l_{e+1} \geq e+1$, więc wynika stąd, że
$$2^{K+e+1} | (2^K - M)^2 + M - 2^K \quad \text{dla} \quad \text{każdego} \quad e \geq e_0.$$
Jest to możliwe wtedy gdy $(2^K - M)^2 + M - 2^K = 0$, czyli $(M - 2^K)(M - 2^K + 1) = 0$. Jest więc $M = 2^K$ lub $w \cdot 2^K = M = 2^K - 1$. Z ostatniej równości wynika, że $2^K | 1$, skąd $K = 0$, $w = 0$, co przeczy nieparzystości w. Zbadamy teraz przypadek $M = 2^K$. Niech $K = r \cdot 2^f$, gdzie r jest liczbą nieparzystą naturalną, f – liczbą całkowitą nieujemną i niech liczba pierwsza $p = s \cdot 2^l + 1$ (s, l – naturalne, s – nieparzyste) będzie dzielnikiem liczby $2^{2^f} + 1$. Oczywiście $2^l + 1 \leq s \cdot 2^l + 1 \leq 2^{2^f} + 1$, skąd $l \leq 2^f$.

Wobec tożsamości
$$2^{2^m} - 1 = (2^{2^0} - 1)(2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \dots (2^{2^{m-1}} + 1)$$
mamy $2^{2^f} + 1 | 2^{2^m} - 1$ dla $m \geq f + 1$, a także $2^{2^f} + 1 | 2^{2^f \cdot r} + 1$ (bo r jest nieparzyste).

Zatem dla dowolnego $m \geq f + 1$ mamy
$$2^{2^f} + 1 | (2^{2^m} - 1) + (2^{2^f \cdot r} + 1) = 2^{2^m} + 2^K.$$

Ponieważ $p | 2^{2^f} + 1$, więc $p | 2^{2^m} + 2^K$ dla $m \geq f + 1$.

Połóżmy $m = 2^f$. (Możemy to zrobić, gdyż $2^f \geq f + 1$ dla każdego $f \in N \cup \{0\}$, co można wykazać indukcyjnie.) Wobec tego spełniona jest podzielność
$$p | 2^{2^e} + M,$$
gdzie $e = 2^f$, $M = 2^K$ oraz spełniony jest warunek $l \leq 2^f = e$. Tym samym twierdzenie jest udowodnione.

Wniosek. Jeżeli $M \neq 1$ jest liczbą całkowitą, to wśród liczb postaci $2^{2^m} + M$ $(m = 1, 2, \dots)$ jest nieskończenie wiele liczb złożonych. (Twierdzenie to wykazał A. Schinzel – zadanie nr 123, str. 18 i 68, ze wspomnianej książeczki Sierpińskiego.) Udowodnione w niniejszej pracy twierdzenie pokazuje, że gdy m przebiega pewien ciąg arytmetyczny, liczby $2^{2^m} + M$ są złożone.

Uwaga. Dla $M = 1$ mamy liczby Fermata $F_m = 2^{2^m} + 1$. Liczby F_1, F_2, F_3, F_4 są pierwsze. Wiadomo również, że liczby $F_5, F_6, \dots, F_{30}$ są złożone (i niektóre inne).
Nie wiadomo:
Czy wśród liczb Fermata jest nieskończenie wiele liczb złożonych?
Czy wśród liczb Fermata jest nieskończenie wiele liczb pierwszych?

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 985. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez 5^n i niezawierająca 0 w swoim zapisie dziesiętnym.
Rozwiązanie na str. 5

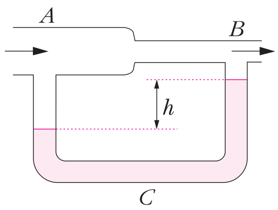
M 986. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb postaci 5^n $(n \in \mathbb{N})$, w których zapisie dziesiętnym występuje 2001 zer z rzędu.
Rozwiązanie na str. 5

M 987. Udowodnić, że dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{N}$ istnieje nieskończenie wiele liczb postaci 5^n $(n \in \mathbb{N})$, w których zapisie dziesiętnym każda z ostatnich m cyfr ma parzystość różną od parzystości cyfr sąsiednich.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 569. Na stole stoi duży cylinder wypełniony wodą do wysokości H. W odległości $H/2$ od cylindra znajduje się pojemnik o szerokości $H/4$ i wysokości $H/4$. Na jakiej wysokości h od dna cylindra należy zrobić mały otworek, tak aby struga wody trafiła do pojemnika? Wysokość wody w cylindrze pozostaje stała.
Rozwiązanie na str. 1

F 570. Przez rurę na poniższym rysunku pompowane jest powietrze z szybkością 15 litrów na minutę. Przekrój szerszej części rury A wynosi $2\ \text{cm}^2$, węższej jest B $0{,}5\ \text{cm}^2$. Znaleźć różnicę poziomów wody w rurze C, jeśli jej przekrój wynosi $0{,}5\ \text{cm}^2$. Gęstość powietrza wynosi $\rho = 1{,}32\ \text{kg/m}^3$.



Rozwiązanie na str. 7