O pewnym problemie Eulera

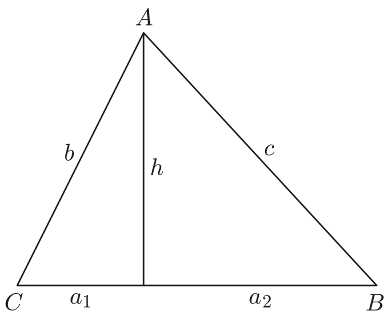
Lev KOURLIANDTCHIK, Boris LURJE

Lev Kourliandtchik pracuje na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu, a Boris Lurje – w Instytucie Matematyki w Sankt-Petersburgu.

Czy istnieje trójkąt, w którym długości boków, wysokości, dwusiecznych i środkowych są równocześnie liczbami całkowitymi? Odpowiedź na to pytanie postawione przez Eulera dotychczas nie jest znana.

Zbudowanie trójkąta, w którym całkowite są długości boków i wysokości, nie stwarza trudności.

W tym celu rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b i przeciwprostokątnej c. Wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość $\frac{2ab}{c}$. Poszukiwanym trójkątem jest, na przykład, trójkąt o bokach ac, bc, c^2 – dla trójkąta egipskiego o bokach 3, 4, 5 otrzymamy w ten sposób trójkąt o bokach 15, 20 i 25.



Rys. 1

Zauważmy, że rozwiązania problemu Eulera można poszukiwać wśród trójkątów o elementach (długościach boków, wysokości i tak dalej) wymiernych, bowiem powiększając taki trójkąt, możemy uzyskać trójkąt o wszystkich tych elementach całkowitych.

Dlatego dalej wystarczy ograniczyć się do budowania trójkątów o elementach wymiernych.

Trójkąt pitagorejski to trójkąt prostokątny o bokach całkowitej długości.

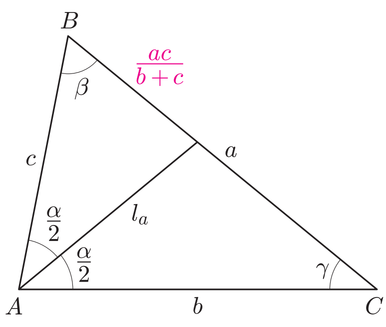
Najpierw opiszemy konstrukcję niekoniecznie prostokątnego trójkąta o bokach i wysokościach całkowitej długości. Przypuśćmy, że mamy taki trójkąt. Sprawdzimy, że trójkąt ten jest podzielony na dwa trójkąty pitagorejskie przez wysokość poprowadzoną z wierzchołka największego kąta. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1.

Wykażemy, że wysokość dzieli trójkąt na dwa trójkąty pitagorejskie, czyli że a_1 i a_2 mają długości całkowite. Rzeczywiście, liczby a_1^2, a_2^2 i $a_1 + a_2$ będą całkowite. Wtedy $a_1 - a_2 = \dfrac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 + a_2}$ jest liczbą wymierną, co pociąga za sobą, że a_1 i a_2 są liczbami wymiernymi. Ponieważ ich kwadraty są liczbami całkowitymi, więc liczby a_1 i a_2 też są całkowite.

Czytelnik zapewne bez trudu obliczy wysokości otrzymanego trójkąta za pomocą wysokości zestawianych trójkątów.

Wynika stąd, że trójkąty o wymiernych bokach i wysokościach to trójkąty powstałe przez zestawienie dwóch trójkątów pitagorejskich.

Przejdźmy teraz do budowania trójkątów o całkowitych długościach boków i dwusiecznych. Przypuśćmy więc, że mamy taki trójkąt i jest on przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2

Po pierwsze zauważmy, że

$$\cos\frac{\alpha}{2},\ \cos\frac{\beta}{2}\ \text{ i }\ \cos\frac{\gamma}{2}$$

są liczbami wymiernymi. Rzeczywiście, z twierdzenia kosinusów wynika, że

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{c^2 + l_a^2 - (\frac{ac}{b+c})^2}{2cl_a}$$

jest liczbą wymierną.

Udowodnimy, że

$$\sin\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\beta}{2}\ \text{ i }\ \sin\frac{\gamma}{2}$$

też są liczbami wymiernymi.

Najpierw zwróćmy uwagę, że wiemy już, iż $\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $\sin^2\frac{\beta}{2}$ i $\sin^2\frac{\gamma}{2}$ są liczbami wymiernymi.

Czytelnik oczywiście zauważył, że p jest liczbą wymierną.

Dalej mamy

$$p := \cos\frac{\beta}{2} = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Stąd
$$p^2-2p\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Podobnie postępujemy dla $\sin\frac{\beta}{2}$ i $\sin\frac{\gamma}{2}$.

A więc liczba $\sin\frac{\alpha}{2}$ jest wymierna.

Stąd natychmiast wynika, że sinusy kątów trójkąta są liczbami wymiernymi, a to oznacza, że wysokości też mają długość wymierną.

Ze wzoru
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}=\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$
wynika, że liczba $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$ jest wymierna.

A więc warunkiem koniecznym istnienia żądanego trójkąta jest wymierność liczb
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4},\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\ \text{i}\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}.$$

Sprawdzimy, że warunek ten jest też dostateczny. Co więcej, wystarczy żądać tylko wymierności dwóch spośród tych trzech liczb.

Rzeczywiście, zachodzi równość
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}=\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{4}\Big)=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}}.$$

Na mocy wzorów
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}}$$
stwierdzamy, że liczby
$$\sin\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\beta}{2},\ \sin\frac{\gamma}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2},\ \cos\frac{\beta}{2},\ \cos\frac{\gamma}{2}$$
są wymierne. A więc wymierne są sinusy i kosinusy wszystkich kątów trójkąta.

Gdy dobierzemy trójkąt tak, aby średnica okręgu opisanego była liczbą wymierną, otrzymamy trójkąt, którego boki, wysokości i dwusieczne mają długości wymierne.

Podamy przykład takiego trójkąta.

Niech $\alpha=\beta$ i niech
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{3},\quad \text{wtedy}\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}=\frac{1}{7}.$$

Stąd
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{3}{4},\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{7}{24},$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5},\quad \sin\frac{\gamma}{2}=\frac{7}{25},\quad \sin\alpha=\frac{24}{25},\quad \sin\gamma=\frac{336}{625}.$$

Po prostych obliczeniach otrzymujemy następujący trójkąt:

długości	boków	24 375	24 375	13 650,
	wysokości	13 104	13 104	23 400,
	dwusiecznych	14 000	14 000	23 400.

Dość łatwo stwierdzić, że nie jest to trójkąt Eulera, bowiem nie wszystkie jego środkowe są całkowite.

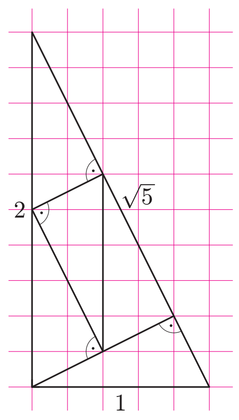
Dla Czytelników proponujemy zastanowienie się nad warunkami koniecznymi i wystarczającymi na to, by trójkąt miał boki całkowitej długości i
– całkowite pole;
– całkowity promień okręgu opisanego (wpisanego, dopisanego).

Problem dotyczący środkowych całkowitej długości jest bardziej skomplikowany, bowiem długości środkowych nie można wyrazić w sposób wymierny za pomocą funkcji trygonometrycznych kątów trójkąta. Autorzy umieją stosunkowo prosto wykazać, że ani żaden trójkąt równoramienny, ani żaden trójkąt prostokątny nie jest trójkątem Eulera. Ale to już dłuższa historia. Powrócimy do niej.

Rozwiązanie zadania M 991.
Przekształcając za pomocą jednokładności o skali 1/2 nasz prostokąt pokryty 100 kołami o promieniu 2, otrzymujemy prostokąt o dwukrotnie mniejszych wymiarach liniowych pokryty 100 kołami o promieniu 1. Z czterech takich prostokątów można złożyć prostokąt wyjściowy, skąd wynika teza.

Rozwiązanie zadania M 992.
Przekształcając za pomocą jednokładności o skali 1/2 nasz trójkąt pokryty 100 kołami o promieniu 2, otrzymujemy trójkąt o dwukrotnie mniejszych wymiarach liniowych pokryty 100 kołami o promieniu 1. Z czterech takich trójkątów można złożyć trójkąt wyjściowy (łącząc środki boków wyjściowego trójkąta, otrzymamy odpowiednie rozcięcie), skąd wynika teza.

Rozwiązanie zadania M 993.
Przekształcając za pomocą jednokładności o skali $1/\sqrt{5}$ nasz trójkąt (prostokątny!) pokryty tysiącem kół o promieniu r, otrzymujemy trójkąt prostokątny o bokach $1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 1$, pokryty tysiącem kół o promieniu $r/\sqrt{5}$.



Jak pokazano na rysunku, z pięciu trójkątów prostokątnych o bokach $1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 1$ można złożyć trójkąt prostokątny o bokach $1, 2, \sqrt{5}$, skąd wynika teza.