

## Łańcuchy Markowa

Wyobraźmy sobie, że mamy 2 tysiące złotych, a potrzebujemy 5 tysięcy. Aby osiągnąć nasz cel, bierzemy udział w następującej grze hazardowej. Rzucamy wielokrotnie monetą i gdy wypadnie orzeł, wygrywamy 1 tysiąc, natomiast w przypadku reszki tracimy 1 tysiąc. Stan naszego portfela to całkowita liczba tysięcy. W każdym dyskretnym kroku czasowym przesuwamy się z jednakowym prawdopodobieństwem  $1/2$  w prawo lub w lewo (na osi liczbowej), a jak trafimy do 0 (bankructwo) lub 5 (osiągnięcie celu), to przerywamy grę i w stanie tym pozostajemy na zawsze.

Powyższy przykład określany jest mianem błędzenia przypadkowego, nazywanym przez niektórych spacerem pijaka. Jest to przykład **łańcucha Markowa** (procesu stochastycznego, rodziny zmiennych losowych zależnych od czasu), w którym prawdopodobieństwo tego, że układ w czasie  $t + 1$  będzie w określonym stanie, zależy tylko od stanu układu w czasie  $t$ , a nie od jego wcześniejszych stanów. Jest to tak zwana własność Markowa braku pamięci,

którą krótko można scharakteryzować tak: przyszłość nie zależy od przeszłości pod warunkiem, że znana jest teraźniejszość.

Jeżeli, dodatkowo, z każdego stanu możemy przejść z niezerowym prawdopodobieństwem, w skończonej liczbie kroków, do każdego innego stanu, to łańcuch taki nazywamy nieprzywiedlnym. Nasz przykładowy łańcuch nie jest, oczywiście, nieprzywiedlny. Możemy go „unieprzywiedlnić”, przyjmując że ze stanu 0 możemy przejść z pewnym dodatnim prawdopodobieństwem do stanu 1 (pomoc uczynnego przyjaciela), a ze stanu 5 do stanu 4, gubiąc 1 tysiąc złotych. Długookresowe zachowanie się łańcucha nieprzywiedlnego nie zależy od stanu początkowego – dla każdego stanu częstotliwość jego odwiedzania jest taka sama wzdłuż „prawie każdej” trajektorii czasowej (to jest jedno z wielu tak zwanych twierdzeń ergodycznych).

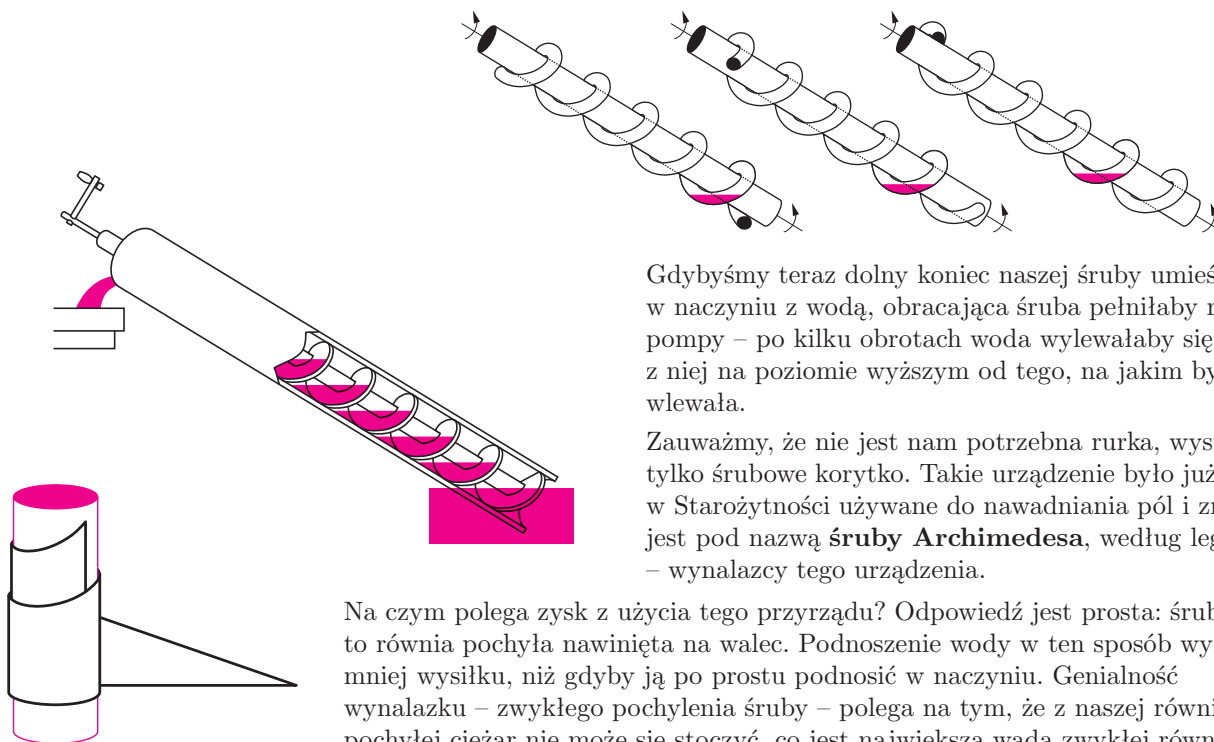
Łańcuch Markowa to przykład dynamicznego układu stochastycznego opisującego wiele zjawisk przyrodniczych i społeczno-ekonomicznych, w których można zaniedbać pamięć układu o jego przeszłości.

Jacek MIĘKISZ



### Śruba Archimedesa

Śruba, dokładniej – linia śrubowa – to jedyna niepłaska linia ślizgająca się po sobie. Weźmy taką grubą linię i na dodatek pustą w środku, czyli rurkę w kształcie śruby. Pochylmy ją tak, aby niektóre jej fragmenty biegingły w dół. Nalejmy do rurki trochę wody. A następnie obracajmy rurkę wokół osi. Przy właściwym wyborze kierunku obrotu zobaczymy ciekawe zjawisko: woda wybierając dla siebie możliwie najniższe położenie, będzie się podnosiła do góry.



Gdybyśmy teraz dolny koniec naszej śruby umieścili w naczyniu z wodą, obracająca śruba pełniłaby rolę pompy – po kilku obrotach woda wylewałaby się z niej na poziomie wyższym od tego, na jakim by się wlewała.

Zauważmy, że nie jest nam potrzebna rurka, wystarczy tylko śrubowe korytko. Takie urządzenie było już w Starożytności używane do nawadniania pól i znane jest pod nazwą **śruby Archimedesa**, według legendy – wynalazcy tego urządzenia.

Na czym polega zysk z użycia tego przyrządu? Odpowiedź jest prosta: śruba to równia pochyła nawinięta na walec. Podnoszenie wody w ten sposób wymaga mniej wysiłku, niż gdyby ją po prostu podnosić w naczyniu. Genialność wynalazku – zwykłego pochylenia śruby – polega na tym, że z naszej równi pochyłej ciężar nie może się stoczyć, co jest największą wadą zwykłej równi.

M. K.