



### Rozwiązanie zadania M 1005.

Niech  $k > 2$ . W  $k$ -tym dniu zmywa żona, jeśli

- w  $k - 2$  i  $k - 1$  dniu zmywali kolejno mąż i żona. Tak się dzieje z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}p_{k-2}$ .

ALBO

- w  $k - 1$  dniu zmywał mąż, a następnie los wskazał na żonę. Tutaj szanse wynoszą  $\frac{1}{2}p_{k-1}$ .

Zatem

$$1 - p_k = \frac{1}{2}(p_{k-1} + p_{k-2}).$$

Ciąg  $r_k = p_k - \frac{1}{2}$  spełnia zależność

$$-r_k = \frac{1}{2}(r_{k-1} + r_{k-2}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}r_{k-3} + \frac{1}{2}r_{k-2}\right).$$

Zatem

$$|r_k| \leq \frac{1}{4}(|r_{k-2}| + |r_{k-3}|).$$

Przez prostą indukcję wykazujemy, że

$$|r_k| \leq \frac{4}{2^{k/4}} \max(|r_1|, |r_2|, |r_3|).$$

Zatem  $r_k \rightarrow 0$  oraz  $p_k \rightarrow \frac{1}{2}$ .

W najprostszym przypadku, gdy występują tylko komórki proliferujące, możemy w sposób jawny zapisać zmianę stężenia składników pokarmowych:

$$c(r, t) = c_Z - a(R^2(t) - r^2),$$

gdzie  $a$  jest współczynnikiem konsumpcji składników pokarmowych przez komórki nowotworowe. Równanie to ma sens, tylko gdy stężenie wewnątrz nowotworu przewyższa wartość progową  $c_N$ , zatem

$$c(0, t) = c_Z - aR^2(t) > c_N, \text{ czyli } R^2(t) < \frac{1}{a}(c_Z - c_N).$$

Dla takich wartości  $R(t)$  możemy wypisać równanie na przyrost tej zmiennej. Okazuje się, że funkcja wzrostu jest wielomianem trzeciego stopnia. Co ciekawe, jeśli wykorzystamy równanie na zmianę  $R(t)$  do obliczenia zmian objętości nowotworu w czasie, to dostaniemy krzywą nieco podobną do logistycznej, gdzie główna różnica polega na tempie wzrostu. W tym przypadku wzrost jest nieco wolniejszy niż w przypadku logistycznym, zatem wartości bliskie pojemności środowiska osiągamy po dłuższym czasie.

Dla większych wartości  $R(t)$  musimy uwzględnić występowanie regionu nekrotycznego i w tym przypadku nie da się już jawnie wypisać rozwiązań. Okazuje się, że w tym przypadku promień obszaru nekrotycznego  $R_N(t)$  rośnie znacznie szybciej niż promień zewnętrzny  $R(t)$  i po pewnym czasie ustala się duży obszar nekrotyczny otoczony niewielką warstwą komórek proliferujących. Przedstawione modele dotyczą tylko początkowej fazy rozwoju nowotworu, gdy nie ma jeszcze naczyń krwionośnych doprowadzających składniki pokarmowe do wnętrza. Następnie rozpoczyna się proces unaczyniania, który jest bardzo skomplikowany, co oczywiście pociąga za sobą budowanie znacznie bardziej skomplikowanych modeli, wymagających zaawansowanego aparatu matematycznego. Prócz tego w rzeczywistości (*in vivo*) nie mamy do czynienia z sytuacją tak symetryczną jak w eksperymentach (*in vitro*) i opisywanych wyżej modelach, co znów komplikuje sprawę. Trzeba rozpatrywać bardzo niejednorodne struktury i jeszcze bardziej skomplikowane modele.

## Zielonego nie ma

Mowa jest o zielonym kolorze w piórach ptaków. Okazuje się, że żaden z naszych ptaków – włączając w to papugi rozmaitych rozmiarów – nie ma w piórach zielonego barwnika. Bardzo łatwo się o tym przekonać, gdy ma się zielone piórko jakiegoś ptaka. Wystarczy położyć je na kawałku czegoś solidnego i starannie stłuc młotkiem. Kolor zielony zginie. Jest tak dlatego, że zieleń piór jest kolorem wyłącznie strukturalnym i powstaje wskutek załamania się światła na maleńkich (ale czułych na młotek) przezroczystych pęcherzykach powietrznych.

Oczywiście barwnik zielony w piórach ptaków istnieje. Przywilej jego posiadania ma tylko jedna, licząca 18 gatunków, rodzina turaków (są to krewni kukulek). Barwnik ten nazywa się, dla uczczenia ich wyjątkowości, *turakowerdyna*. Nie jest to jedyna ich barwna osobliwość – mają też *turacynę*, zmieniającą kolor zależnie od wilgoci z czerwono-fioletowego na granatowy i z powrotem.

M. K.

## Automat na gałęzi

Zapewne wielu intryguje fakt, że ptaki potrafią siedzieć na gałęzi bez widocznego wysiłku, potrafią na niej spać, choć z punktu widzenia mechaniki równowaga ta jest raczej chwiejna – rozmiary ptaka są zdecydowanie większe od średnicy gałęzi. Utrzymywanie równowagi siłą mięśni byłoby przecież zbyt energochłonne. Tymczasem działa tu bardzo proste urządzenie mechaniczne, w które Natura w toku ewolucji zaopatrzyła naszych latających braci. Jego schemat jest widoczny na rysunku – im cięższy jest ptak, tym mocniej zwierają się jego szpony na gałęzi.

Jest, co prawda, pewien gatunek papugi (*Loriculus gargulus* z Wysp Sundajskich), którego przedstawicielki mają zwyczaj spać wisząc pod gałęzią, ale „zaprojektowanie” pewnego chwytu w takiej sytuacji nie przedstawia już żadnego kłopotu. Tym bardziej, że używają go również nietoperze.

M. K.

