10/02 (58)

Γ limatias $_{n\to\infty}$

O RÓWNYCH SUMACH DZIESIĄTYCH POTĘG

Pierwszy przykład równych sum sześciu dziesiątych potęg znalazł Randy Ekl w roku 1997:

$$95^{10}+71^{10}+32^{10}+28^{10}+25^{10}+16^{10}= \\ =92^{10}+85^{10}+34^{10}+34^{10}+23^{10}+5^{10}.$$

Kolejny taki przykład odkrył Nuutti Kuosa w roku 1999:

$$151^{10}+140^{10}+127^{10}+86^{10}+61^{10}+22^{10}= \\ =148^{10}+146^{10}+121^{10}+94^{10}+47^{10}+35^{10}.$$

Powyższy przykład jest o tyle ciekawy, że równość pozostaje prawdziwa po zastąpieniu wykładnika 10 dowolną z liczb $2,4,6,8$.

Prosta manipulacja daje równość

$$151^n+140^n+127^n+86^n+61^n+22^n+(-22)^n+ \\ +(-61)^n+(-86)^n+(-127)^n+(-140)^n+(-151)^n= \\ =148^n+146^n+121^n+94^n+47^n+35^n+(-35)^n+ \\ +(-47)^n+(-94)^n+(-121)^n+(-146)^n+(-148)^n$$

prawdziwą dla $n=1,2,3,4,\ldots,11$. W równości tej można do podstawy każdej potęgi dodać tę samą liczbę, otrzymując na przykład:

$$302^n+291^n+278^n+237^n+212^n+173^n+129^n+ \\ +90^n+65^n+24^n+11^n+0^n= \\ =299^n+297^n+272^n+245^n+198^n+186^n+ \\ +116^n+104^n+57^n+30^n+5^n+3^n.$$

W lutym 2002 roku udało mi się znaleźć trzeci przykład zawierający łącznie 12 dziesiątych potęg:

$$223^{10}+112^{10}+54^{10}+32^{10}+29^{10}= \\ =214^{10}+192^{10}+168^{10}+165^{10}+130^{10}+121^{10}+52^{10}.$$

Po lewej stronie jest 5, a po prawej 7 wyrazów.

W marcu 2002 roku Nuutti Kuosa znalazł kilka dalszych przykładów równych sum sześciu dziesiątych potęg.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (32)

Zadanie: Wyznaczyć wszystkie trójkąty ABC o następującej własności: trójkąt ABC jest podobny do trójkąta AOB, gdzie O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Rozwiązanie: Z twierdzenia o kącie wpisanym wynika równość

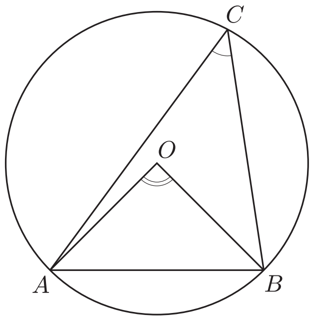
$$\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB,$$

zatem $\sphericalangle AOB \neq \sphericalangle ACB$ (zob. rys. 1). Ponadto trójkąt AOB jest równoramienny, jeśli więc trójkąty ABC i AOB są podobne, to trójkąt ABC jest równoramienny i

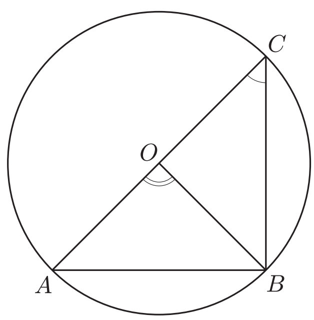
$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = \\ = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle AOB) = 90^\circ - \sphericalangle ACB,$$

skąd $\sphericalangle ACB = 45^\circ$.

Zatem warunki zadania spełniają trójkąty prostokątne równoramienne ABC o kącie prostym przy jednym z wierzchołków A lub B. Faktycznie konfiguracja wygląda jak na rys. 2 (w przypadku, gdy prosty jest kąt przy wierzchołku B).



Rys. 1



Rys. 2

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (33)

Zadanie: Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\frac{n^2+3}{n^3+3}+\ldots+\frac{n^2+n}{n^3+n}\right).$$

Rozwiązanie: Bez trudu stwierdzamy, że każdy składnik sumy dąży do 0 wraz n dążacym do nieskończoności. Na mocy twierdzenia mówiącego, że granica sumy jest sumą granic, dana w zadaniu granica jest równa 0.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (34)

Zadanie: Rozstrzygnąć, czy liczba $0{,}11235831\ldots$, w której każda cyfra po przecinku, począwszy od trzeciej, jest resztą z dzielenia sumy dwóch poprzednich cyfr przez 10, jest wymierna czy niewymierna.

Rozwiązanie: Dokładniejsze obliczenia pokazują, że dana w zadaniu liczba jest równa

$$0{,}11235831459437077415617853819099875279651673033695\ldots$$

Jak wiadomo, liczba rzeczywista jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy jej rozwinięcie na ułamek dziesiętny jest okresowe lub skończone.

Patrząc na podane wyżej rozwinięcie z dokładnością do 50 cyfr po przecinku, widzimy, że rozwinięcie danej w zadaniu liczby nie jest okresowe, jest więc to liczba niewymierna.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl