11/02 (59)

Γlimatias $_{n\to\infty}$

O RÓWNYCH SUMACH JEDENASTYCH POTĘG

Do lutego 2002 roku znana była tylko jedna równość zawierająca tylko 15 jedenastych potęg. Obecnie takich równości znamy 25, nie ma już więc w nich niczego interesującego.

Kiedy 8 marca 2002 roku wracałem pociągiem z zebrania Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej, otrzymałem SMS-a. To Nuutti Kuosa, który na kilkunastu komputerach uruchomił mój program, zawiadomił mnie o pierwszym przykładzie zawierającym tylko 14 jedenastych potęg:

$$(11,6,8)\quad 182^{11}+145^{11}+132^{11}+114^{11}+56^{11}+43^{11}= \\ =175^{11}+160^{11}+158^{11}+112^{11}+110^{11}+ \\ +109^{11}+102^{11}+76^{11}.$$

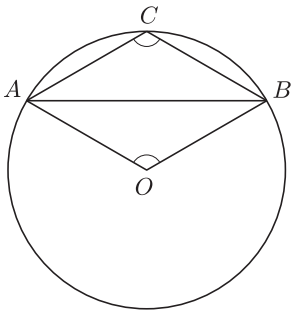
Dalsze poszukiwania zaowocowały dwoma kolejnymi przykładami:

$$(11,5,9)\quad 196^{11}+173^{11}+127^{11}+104^{11}+11^{11}= \\ =199^{11}+153^{11}+128^{11}+121^{11}+100^{11}+ \\ +98^{11}+59^{11}+14^{11}+3^{11},$$

$$(11,6,8)\quad 227^{11}+146^{11}+82^{11}+55^{11}+43^{11}+21^{11}= \\ =225^{11}+181^{11}+157^{11}+109^{11}+96^{11}+ \\ +85^{11}+64^{11}+53^{11}.$$

Naszym celem jest znalezienie przykładu typu (11,7,7), czyli równych sum siedmiu jedenastych potęg (oj, prześladuje mnie to **711**, prześladuje – za młodu wziąłem udział w konkursie *Delty* pod nazwą **711**, w pracy jestem ulokowany w pokoju **711**, *Delta* ukazuje się po raz $342 = 2\cdot\mathbf{171}$, teraz ta pogoń za **7**-ma **11**-tymi potęgami).

Czy nam się to uda? Tę i inne ciekawe informacje o równych sumach potęg możesz, drogi Czytelniku, znaleźć pod adresem: http://euler.free.fr



MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (32′)

Wyjaśnienie oszustwa (32): Podane rozwiązanie jest błędne w przypadku, gdy $\sphericalangle ACB$ jest rozwarty (zob. rys.). Wówczas

$$\sphericalangle AOB = 360^\circ - 2\sphericalangle ACB$$

i kąty $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle ACB$ nie muszą być różne.

Bez trudu stwierdzamy, że warunki zadania są spełnione także w przypadku, gdy trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym o kącie przy wierzchołku C równym 120°. W tym przypadku trójkąty ABC i AOB są nie tylko podobne, ale nawet przystające.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (33′)

Wyjaśnienie oszustwa (33): Granica sumy jest sumą granic wtedy, gdy liczba składników sumy jest stała. W podanym zadaniu n-ta suma ma n składników, z których każdy jest zbliżony wielkością do $1/n$. Nierówności

$$n\cdot\frac{n^2+1}{n^3+n}=\frac{n^2+1}{n^3+n}+\frac{n^2+1}{n^3+n}+\frac{n^2+1}{n^3+n}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3+n}\leqslant\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\frac{n^2+3}{n^3+3}+\ldots+\frac{n^2+n}{n^3+n}\leqslant\frac{n^2+n}{n^3+1}+\frac{n^2+n}{n^3+1}+\frac{n^2+n}{n^3+1}+\ldots+\frac{n^2+n}{n^3+1}=n\cdot\frac{n^2+n}{n^3+1}$$

w połączeniu z twierdzeniem o trzech ciągach dowodzą, że podana granica jest równa 1.

Jest to klasyczny przykład zadania **samosprawdzającego**. Jeśli zadanie oceniać w skali 0-1, to ocenienie zadania na ogół sprowadza się do przepisania wyniku podanego przez ucznia jako oceny za zadanie.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (34′)

Wyjaśnienie oszustwa (34): No cóż, argumentacja w stylu *okresu nie ma, bo go nie widać*, jest nie tylko nieścisła, ale wręcz błędna.

Podana liczba jest równa
0,(112358314594370774156178538190998752796516730336954932572910)
Jest to ułamek okresowy o okresie długości 60.

Istnienie okresu można przewidzieć bez wykonywania obliczeń. Otóż każda cyfra zależy tylko od dwóch poprzednich. Ponieważ możliwych par cyfr jest 100, pewna para musi się w końcu powtórzyć, a to oznacza, że następne cyfry będą takie same po obu wystąpieniach tej pary. Widać stąd, że okres podstawowy nie może mieć długości większej niż 100.

Zatem dana liczba jest wymierna i równa

$$\frac{112358314594370774156178538190998752796516730336954932572910}{999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999}=\frac{112358202236168425629438314382022572910}{999999000000998999001000999000000999999}.$$

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl