



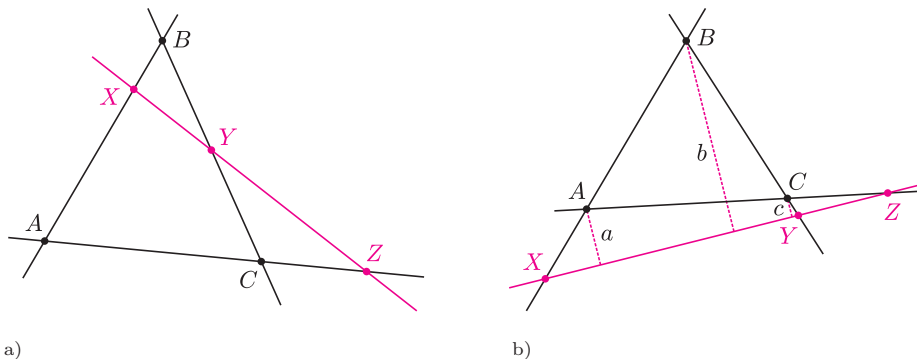
Twierdzenie–wytrych

Zdzisław POGODA

Istnieją twierdzenia, które można wykorzystywać do dowodu wielu innych twierdzeń, które niemal jak wytrychy radzą sobie w przeróżnych, wydawałoby się nietypowych, sytuacjach. Jednym z takich „narzędzi” jest twierdzenie Menelaosa. Podaje ono warunek na współliniowość punktów leżących na prostych zawierających boki trójkąta. Przypomnijmy jego sformułowanie.

Twierdzenie (Menelaos). Trzy punkty X, Y i Z , leżące na prostych zawierających boki trójkąta odpowiednio AB, BC i CA , są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek

$$(*) \quad \frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BY}}{\overrightarrow{YC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CZ}}{\overrightarrow{ZA}} = -1.$$



Rys. 1

Stosunek wektorów oznacza symbolicznie ich współczynnik proporcjonalności, gdyż te z jednego „ułamka” są równoległe. Liczba -1 po prawej stronie równości wskazuje, że jeden z wyróżnionych punktów albo wszystkie trzy leżą na przedłużeniach boków, a nie na bokach.

Twierdzenie to należy do klasycznej geometrii, ale dawno już znikło z programów szkolnych. Dowód jego jest bardzo prosty. Ograniczymy się do wersji „odcinkowej” twierdzenia.

Gdy punkty X, Y i Z są współliniowe, to wystarczy rzutować prostopadle wierzchołki trójkąta na prostą wyznaczoną przez te punkty. Następnie każdą z proporcji na podstawie twierdzenia Talesa zamieniamy na stosunek długości odcinków łączących wierzchołki trójkąta z ich rzutami prostokątnymi i dostajemy żadaną równość. Zachodzi bowiem

$$\frac{AX}{XB} = \frac{a}{b}, \quad \frac{BY}{YC} = \frac{b}{c}, \quad \frac{CZ}{ZA} = \frac{c}{a}.$$

Rozumowanie w drugą stronę jest typowe w takich przypadkach: niech będzie spełniony warunek $(*)$ dla długości (a więc z jedynką po prawej stronie). Prosta przechodząca przez punkty X i Y wyznacza na prostej CA punkt Z' . Zgodnie z tym, co przed chwilą pokazaliśmy, punkty X, Y i Z' spełniają warunek

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ'}{Z'A} = 1.$$

Z obu tych równości wynika, że $\frac{CZ}{ZA} = \frac{CZ'}{Z'A}$ i w konsekwencji $Z = Z'$, co wobec współliniowości X, Y, Z' dowodzi współliniowości punktów X, Y i Z .

Z twierdzenia Menelaosa prosto wynika twierdzenie Ceva. Przypomnijmy je.

Twierdzenie (Ceva). Trzy proste przechodzące przez wierzchołki A, B i C dowolnego trójkąta i przecinające boki AB, BC i CA odpowiednio



Rozwiązanie zadania M 1012.

Nie wprost. Załóżmy, że spełnionych jest $\binom{7}{3}$ nierówności postaci

$$|\vec{a}_{i_1} + \vec{a}_{i_2} + \vec{a}_{i_3}|^2 > |\vec{a}_{i_4} + \vec{a}_{i_5} + \vec{a}_{i_6} + \vec{a}_{i_7}|^2.$$

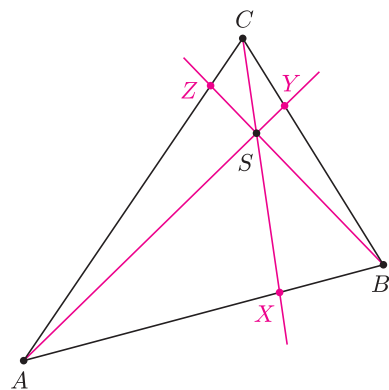
Zapiszmy te nierówności, używając iloczynu skalarnego (\circ) i zsumujmy stronami:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{7} \binom{7}{3} \sum_{k=1}^7 (\vec{a}_k \circ \vec{a}_k) + 6 \binom{7}{3} \binom{7}{2}^{-1} \sum_{l < m} (\vec{a}_l \circ \vec{a}_m) > \\ & > \frac{4}{7} \binom{7}{3} \sum_{k=1}^7 (\vec{a}_k \circ \vec{a}_k) + \\ & \quad + 12 \binom{7}{3} \binom{7}{2}^{-1} \sum_{l < m} (\vec{a}_l \circ \vec{a}_m). \end{aligned}$$

Po drobnych uproszczeniach otrzymamy

$$\sum_{k=1}^7 (\vec{a}_k \circ \vec{a}_k) + 2 \sum_{l < m} (\vec{a}_l \circ \vec{a}_m) < 0.$$

Ale lewa strona nierówności to $|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_7|^2!$



Rys. 2

w punktach X, Y i Z przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BY}}{\overrightarrow{YC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CZ}}{\overrightarrow{ZA}} = 1.$$

Tym razem wszystkie trzy wyróżnione punkty leżą na bokach trójkąta (jak na rysunku 2) albo dokładnie dwa punkty leżą na przedłużeniach.

Założmy, że proste przecinają się w punkcie S . Zastosujemy twierdzenie Menelaosa dwukrotnie: najpierw do trójkąta AXC i prostej przechodzącej przez punkty Z, S i B , czyli

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BX}} \cdot \frac{\overrightarrow{XS}}{\overrightarrow{SC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CZ}}{\overrightarrow{ZA}} = -1,$$

a następnie do trójkąta XBC i prostej, na której leżą punkty A, S i Y , skąd

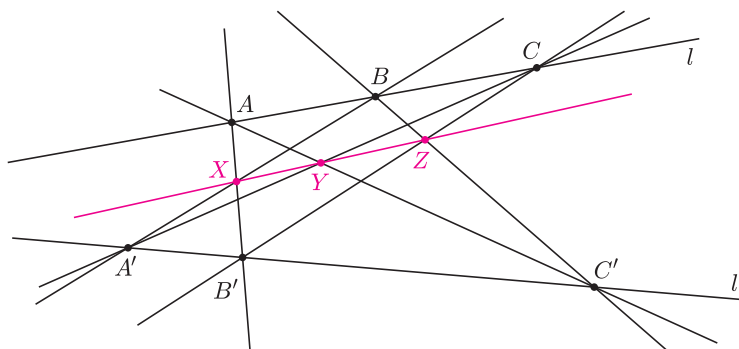
$$\frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{AB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BY}}{\overrightarrow{YC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CS}}{\overrightarrow{SX}} = -1.$$

Jeśli teraz pomnożymy ostatnie równości stronami i skrócimy zbędne wyrażenia, to dostaniemy tezę.

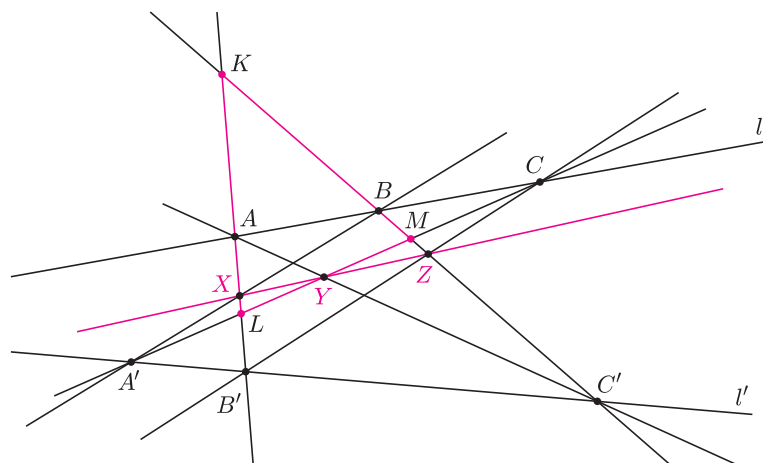
Czytelnik zechce sam sprawdzić, że dowód w drugą stronę można poprowadzić analogicznie jak w twierdzeniu Menelaosa.

Kolejnym twierdzeniem, które można udowodnić, posługując się „wytrychem”, jest bardzo ważne w geometrii rzutowej

Twierdzenie (Pappus). Na prostej l wybieramy trzy różne punkty A, B i C , a na prostej l' punkty A', B' i C' . Punkty X, Y i Z , o ile istnieją, powstałe odpowiednio w wyniku przecięcia prostych AB' i $A'B$, AC' i $A'C$ oraz BC' i $B'C$ są współliniowe (rys. 3a, 3b).

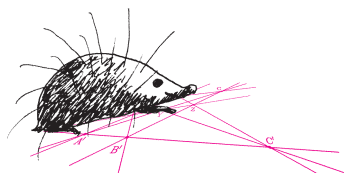


Rys. 3a



Rys. 3b

Proste $A'Y, C'B$ i $B'A$ wyznaczają trójkąt, którego wierzchołki oznaczymy K, L i M . Do tego trójkąta oraz odpowiednio dobranych pięciu prostych zastosujemy twierdzenie Menelaosa. Wyróżnione proste przechodzą przez

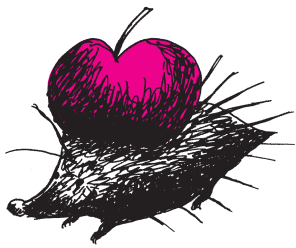


Rozwiązanie zadania M 1013.

Niech P będzie środkiem sfery i $\vec{a}_i = \overrightarrow{PM}_i$. Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{k < l} |M_k M_l|^2 &= \sum_{k < l} (\vec{a}_k - \vec{a}_l \circ \vec{a}_k - \vec{a}_l) = \\ &= n \sum_{k=1}^n (\vec{a}_k \circ \vec{a}_k) - \left(\sum_{k=1}^n \vec{a}_k \circ \sum_{k=1}^n \vec{a}_k \right) < \\ &< n \cdot n - 0 = n^2. \end{aligned}$$





następujące trójki punktów $\{Y, C', A\}$, $\{A', B, X\}$, $\{C, Z, B'\}$, $\{C, B, A\}$, i $\{A', C', B'\}$. Mamy więc odpowiednie zależności:

$$\frac{\overrightarrow{LY}}{\overrightarrow{YM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MC'}}{\overrightarrow{C'K}} \cdot \frac{\overrightarrow{KA}}{\overrightarrow{AL}} = -1, \quad \frac{\overrightarrow{LA'}}{\overrightarrow{A'M}} \cdot \frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{BK}} \cdot \frac{\overrightarrow{KX}}{\overrightarrow{XL}} = -1,$$

$$\frac{\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{CM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MZ}}{\overrightarrow{ZK}} \cdot \frac{\overrightarrow{KB'}}{\overrightarrow{B'L}} = -1,$$

$$\frac{\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{CM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{BK}} \cdot \frac{\overrightarrow{KA}}{\overrightarrow{AL}} = -1, \quad \frac{\overrightarrow{LA'}}{\overrightarrow{A'M}} \cdot \frac{\overrightarrow{MC'}}{\overrightarrow{C'K}} \cdot \frac{\overrightarrow{KB'}}{\overrightarrow{B'L}} = -1.$$

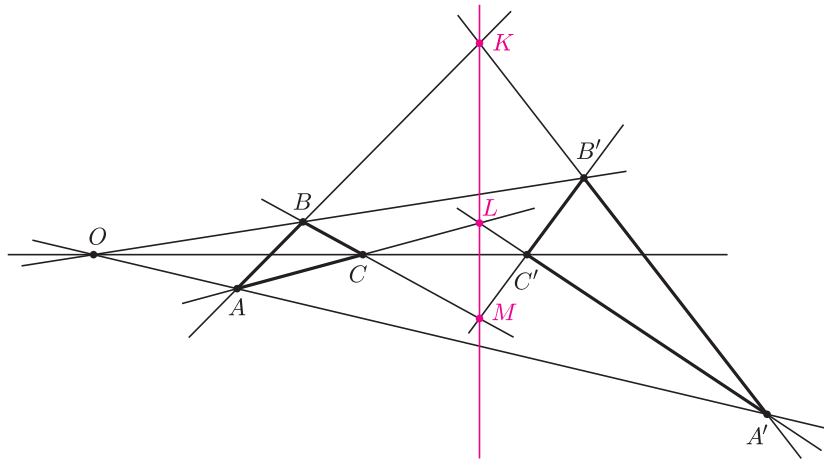
Jeśli teraz pomnożymy pierwsze trzy stronami i podzielimy przez iloczyn ostatnich dwóch, to dostaniemy równość

$$\frac{\overrightarrow{LY}}{\overrightarrow{YM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MZ}}{\overrightarrow{ZK}} \cdot \frac{\overrightarrow{KX}}{\overrightarrow{XL}} = -1,$$

co oznacza, że punkty X, Y i Z są współliniowe.

Innym ważnym twierdzeniem w geometrii rzutowej jest twierdzenie Desarguesa. Ono również może być udowodnione za pomocą twierdzenia Menelaosa. Twierdzenie Desarguesa można wypowiedzieć na przykład tak:

Twierdzenie (Desargues). Jeśli proste przechodzące przez pary wierzchołków A i A' , B i B' oraz C i C' trójkątów ABC i $A'B'C'$ przecinają się w jednym punkcie, to punkty przecięcia prostych zawierających boki AB i $A'B'$, AC i $A'C'$ oraz BC i $B'C'$ – o ile istnieją – są współliniowe.



Rys. 4

Oznaczmy przez O punkt przecięcia prostych przechodzących przez wierzchołki i , odpowiednio,

K – punkt przecięcia prostych zawierających boki AB i $A'B'$,
 L – punkt przecięcia prostych zawierających boki AC i $A'C'$,
 M – punkt przecięcia prostych zawierających boki BC i $B'C'$.

Następnie zastosujemy twierdzenie Menelaosa do trójkąta ACO i trójki punktów $\{L, C', A'\}$, do trójkąta BAO i trójki $\{K, A', B'\}$ oraz wreszcie do trójkąta CBO i trójki punktów $\{M, B', C'\}$. Dostaniemy zależności

$$\frac{\overrightarrow{AL}}{\overrightarrow{LC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{A'A}} = -1, \quad \frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{B'B}} = -1,$$

$$\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{C'C}} = -1.$$

Mnożąc je stronami i wykonując niezbędne skrócenia, dojdziemy do równości

$$\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AL}}{\overrightarrow{LC}} = -1.$$



Rozwiązanie zadania F 587.

Cząstka powinna dotrzeć do takiego punktu, w którym siły działające na ładunek q_3 od ładunków q_1 i q_2 będą równe. Zatem w większej odległości działanie ładunku q_1 będzie silniejsze:

$$\frac{q_3 |q_2|}{(l+r)^2} = \frac{q_3 |q_1|}{r^2},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l} \left(\sqrt{\frac{|q_2|}{|q_1|}} - 1 \right),$$

$$\frac{1}{r+l} = \frac{1}{l} \left(1 - \sqrt{\frac{|q_2|}{|q_1|}} \right).$$

Z prawa zachowania energii mamy

$$4\pi\epsilon_0 \frac{mv^2}{2} = \frac{|q_3 q_2|}{l+r} - \frac{|q_3 q_1|}{r} =$$

$$= \frac{|q_3|}{l} \left(|q_1| + |q_2| - 2\sqrt{|q_1||q_2|} \right),$$

stąd

$$v = \sqrt{\frac{2|q_3|}{4\pi\epsilon_0 ml} \left(\sqrt{|q_2|} - \sqrt{|q_1|} \right)^2}$$

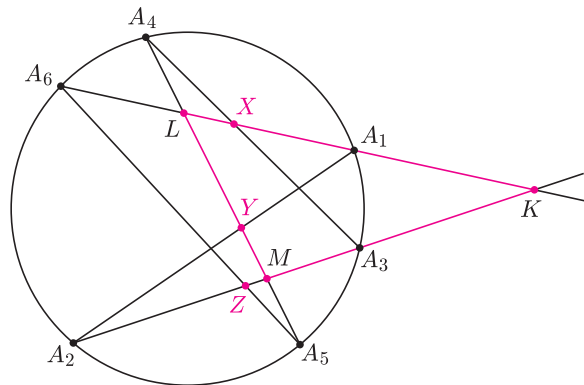
dla $|q_2| > |q_1|$, $v = 0$ dla $|q_2| \leq |q_1|$.

Stosując teraz twierdzenie Menelaosa do trójkąta CBA i trójki punktów $\{M, K, L\}$, stwierdzamy, że punkty K, L i M leżą na jednej prostej.

Tę prostą nazywa się osią perspektywy trójkątów, punkt O środkiem perspektywy. Dlatego też twierdzenie Desarguesa można wypowiedzieć elegancko: jeśli dwa trójkąty mają środek perspektywy, to mają również oś perspektywy. Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne i może Czytelnik zechce sam spróbować je udowodnić.

Na koniec zastosujemy twierdzenie Menelaosa do jeszcze jednego ważnego twierdzenia z geometrii rzutowej – twierdzenia Pascala. Wypowiemy je w wersji specjalnej dla okręgu, pochodzącej prawdopodobnie od Pascala.

Twierdzenie (Pascal). Proste zawierające przeciwległe boki sześciokąta wpisanego w okrąg przecinają się w punktach leżących na jednej prostej (o ile wspomniane proste mają punkty wspólne).



Rys. 5

Rozumowanie jest analogiczne jak w przypadku twierdzenia Pappusa, tylko twierdzenie Menelaosa wykorzystujemy trzykrotnie, a nie pięciokrotnie. Jeśli przyjmiemy oznaczenia jak na rysunku, to stosujemy „wytrych” do trójkąta LMK i kolejno trzech trójek punktów $\{Y, A_2, A_1\}$, $\{A_4, A_3, X\}$ i $\{A_5, Z, A_6\}$. Mamy odpowiednio

$$\frac{\overrightarrow{LY}}{\overrightarrow{YM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MA_2}}{\overrightarrow{A_2K}} \cdot \frac{\overrightarrow{KA_1}}{\overrightarrow{A_1L}} = -1, \quad \frac{\overrightarrow{LA_4}}{\overrightarrow{A_4M}} \cdot \frac{\overrightarrow{MA_3}}{\overrightarrow{A_3K}} \cdot \frac{\overrightarrow{KX}}{\overrightarrow{XL}} = -1,$$

$$\frac{\overrightarrow{LA_5}}{\overrightarrow{A_5M}} \cdot \frac{\overrightarrow{MZ}}{\overrightarrow{ZK}} \cdot \frac{\overrightarrow{KA_6}}{\overrightarrow{A_6L}} = -1.$$

Jak we wszystkich poprzednich przykładach, mnożymy równości stronami i skracamy co się da, ale tym razem wykorzystujemy jeszcze zależności

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KA_1} \cdot \overrightarrow{KA_6} &= \overrightarrow{KA_3} \cdot \overrightarrow{KA_2}, \\ \overrightarrow{LA_4} \cdot \overrightarrow{LA_5} &= \overrightarrow{LA_1} \cdot \overrightarrow{LA_6}, \\ \overrightarrow{MA_3} \cdot \overrightarrow{MA_2} &= \overrightarrow{MA_4} \cdot \overrightarrow{MA_5}. \end{aligned}$$

Dla Czytelnika znającego własności potęgi względem okręgu są to równości oczywiste. Czytelnik nieznający tego pojęcia bez większych problemów powinien sam je wykazać, wykorzystując własności okręgu i np. trójkątów podobnych. Po skróceniu z zależności

$$\frac{\overrightarrow{LY}}{\overrightarrow{YM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MZ}}{\overrightarrow{ZK}} \cdot \frac{\overrightarrow{KX}}{\overrightarrow{XL}} = -1$$

i, oczywiście, z twierdzenia Menelaosa mamy tezę.

Pokazaliśmy kilka zastosowań jednego z trochę już zapomnianych twierdzeń klasycznej geometrii do dowodu najważniejszych twierdzeń geometrii rzutowej. Być może Czytelnik zechce wskazać jeszcze inne zastosowania tego twierdzenia–wytrychu.

