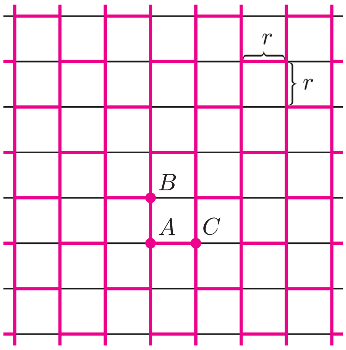
Elektryczne sieci nieskończone

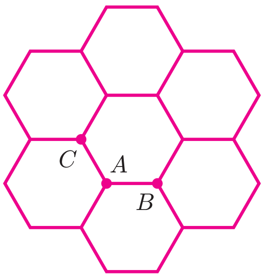
Rozwiążmy następujący problem:

Mamy nieskończoną kwadratową sieć, pokrytą częściowo przewodnikami, a częściowo opornikami.

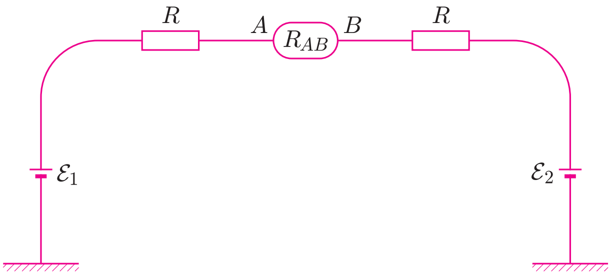


Obliczyć opór między punktami A i B oraz A i C tej sieci.

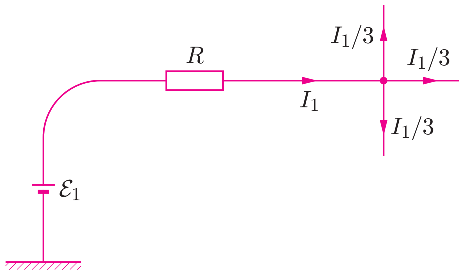
Przystępując do rozwiązania problemu, zauważmy, że powyższy układ można przerysować następująco.



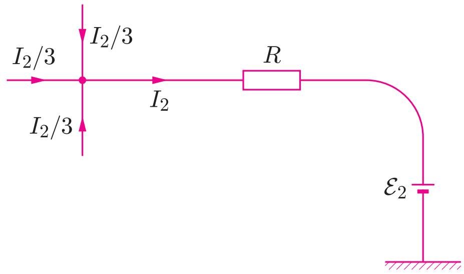
Podłączmy do punktów A i B układu dwa jednakowe źródła prądu o siłach elektromotorycznych $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ (ich opory wewnętrzne zaniedbujemy), poprzez dwa jednakowe oporniki o opornościach $R \gg r$, dobierając ich parametry tak, żeby $\mathcal{E}/R = 1$ A.



Rozpatrzymy najpierw podłączenie tylko jednego źródła w punkcie A, otrzymując następujące rozgałęzienie wpływającego do węzła A prądu $I_1 = \mathcal{E}/(R + r_{AB}) \approx 1$ A.



Zatem, gdy mamy tylko źródło z siłą elektromotoryczną $\mathcal{E}_2$, prąd wypływający z węzła B jest równy $I_2 = \mathcal{E}/(R + r_{AB}) \approx 1$ A.



Prąd ten składa się z prądów z trzech spotykających się w B węzłów sieci i wypływa na zewnątrz przez źródło $\mathcal{E}_2$. Podłączmy teraz do punktów A i B oba źródła. Z zasady superpozycji oraz warunku $R \gg r$ otrzymujemy, że przez odcinek AB będzie płynął prąd $I = (I_1 + I_2)/3$, a spadek napięcia będzie równy: $U_{AB} = 2/3$ V. Z drugiej strony, do układu jest podłączone zewnętrzne napięcie $2\mathcal{E}$ i płynie w nim prąd $I \approx 2\mathcal{E}/(2R) = 1$ A. Zatem

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{2}{3}\ \Omega.$$

W przypadku gdy napięcie zewnętrzne jest przyłożone do punktów A i C, przez analogiczne rozumowanie otrzymujemy:

$$R_{AC} = \frac{2}{3}\ \Omega.$$

Pozostaje więc znaleźć opór między punktami B i C. Podłączenie tylko jednego źródła prowadzi do tego, że przez odcinek AB popłynie prąd $I/3$, a przez odcinek AC – prąd $I/6$. Podłączmy więc do węzła jeszcze jedno źródło. Z symetrii układu i zasady superpozycji otrzymujemy:

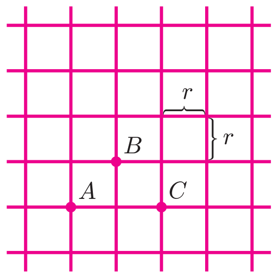
$$U_{BC} = 1\ \Omega \left(\frac{1}{3}\,\text{A} + \frac{1}{6}\,\text{A}\right) + 1\ \Omega \left(\frac{1}{3}\,\text{A} + \frac{1}{6}\,\text{A}\right) = 1\ \text{V}$$

oraz

$$R_{BC} = \frac{U_{AC}}{I} = 1\ \Omega.$$

Problem ten przypomina zadanie, które pojawiło się na XLIII Olimpiadzie Fizycznej, stopień II:

Z nieskończenie wielu identycznych oporników, każdy o oporze r, zbudowano sieć pokazaną na rysunku obok. Wiedząc, że opór zastępczy tej sieci między punktami A i B wynosi $2r(1 - 2/\pi)$, oblicz opór zastępczy sieci między punktami A i C.



Idea rozwiązania jest podobna do przedstawionej powyżej. Dociekliwych Czytelników odsyłamy do zbiorku [1], ambitniejszym proponujemy samodzielne rozwiązanie. Wynik jest następujący: $R_{AC} = 2r/\pi$.

E. Cz.

[1] W. Ungier, M. Hamera *Wybrane zadania z 43 Olimpiad Fizycznych*, Wydawnictwo MAGIPPA Warszawa 1994