04/03 (64)

Γ $\lim_{n\to\infty}$ atias

Drodzy Czytelnicy! Wśród Was jest 10 typów ludzi: ci, którzy lubią posługiwać się układem dwójkowym oraz ci, którzy tego nie lubią. Każdy z Was miał 1000000 okazji, aby zajrzeć do Γ-limatiasu.

KOLOROWANKI – NUMEROWANKI (2)

Zadanie: (XLVI Olimpiada Matematyczna, II stopień, zadanie 6): Kwadrat o boku długości n dzielimy na n^2 kwadratów jednostkowych. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których taki kwadrat można pociąć wzdłuż linii tego podziału na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2 lub 3.

Rozwiązanie: Bez trudu stwierdzamy, że podział kwadratu jest możliwy, gdy n jest parzyste lub podzielne przez 3, gdyż wówczas możemy podzielić kwadrat tylko na kwadraty o boku odpowiednio 2 lub 3.

Główna trudność polega na udowodnieniu, że w przypadku, gdy n jest liczbą nieparzystą niepodzielną przez 3, żądany podział nie jest możliwy. Udowodnimy to kilkoma sposobami.

W dalszym ciągu załóżmy, że n jest liczbą nieparzystą niepodzielną przez 3. Kwadraty jednostkowe, na które podzielono duży kwadrat, będziemy nazywać polami. Wszelkie kwadraty o bokach 2 lub 3, do których będziemy się odwoływać, utworzone są odpowiednio z 4 lub 9 pól.

Sposób I: W pola kwadratu wpiszmy liczby 1 i -1, wypełniając co drugi rząd (począwszy od pierwszego) jedynkami, a pozostałe rzędy minus jedynkami (rys. 1).

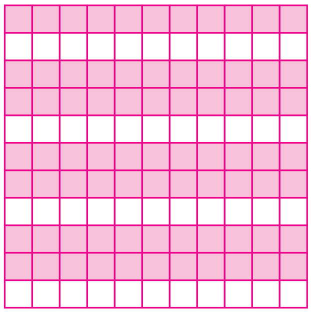
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Rys. 1

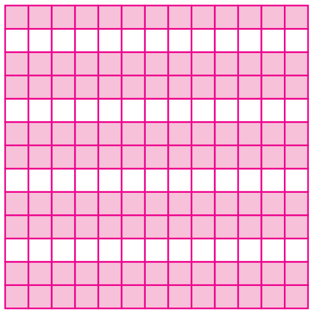
Wówczas suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa n, nie jest więc podzielna przez 3.

Tymczasem każdy kwadrat o boku 2 zawiera liczby o sumie 0, a każdy kwadrat o boku 3 zawiera liczby o sumie ± 3. Zatem jakakolwiek figura dająca się pokryć kwadratami o bokach 2 lub 3 zawiera w swoich polach liczby o sumie podzielnej przez 3. Jak wcześniej ustaliliśmy, kwadrat o boku n taką figurą nie jest.

Sposób II: Pokolorujmy pola kwadratu rzędami tak, aby niepokolorowane zostały pola co trzeciego rzędu, poczynając od rzędu drugiego (rys. 2 i 3).



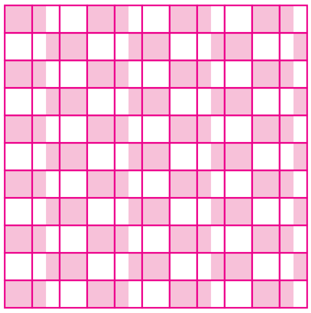
Rys. 2



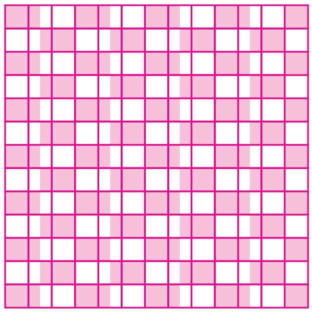
Rys. 3

Wówczas liczba pokolorowanych pól kwadratu jest nieparzysta. Każdy kwadrat o boku 2 zawiera 2 lub 4 pokolorowane pola, natomiast każdy kwadrat o boku 3 zawiera 6 pól pokolorowanych. Tak więc każdy kwadrat o boku 2 lub 3 zawiera parzystą liczbę pól pokolorowanych.

Sposób III: Pomalujmy kwadrat w szachownicę, której pola są prostokątami o bokach 1 i 1,5 (rys. 4 i 5).



Rys. 4



Rys. 5

Wówczas pole powierzchni pomalowanej jest o 1 większe od pola powierzchni niepomalowanej. Tymczasem każdy kwadrat o boku 2 lub 3 jest zamalowany dokładnie w połowie.

Sposób IV: Wypełnijmy pola kwadratu liczbami jak na rys. 6 i 7.

1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0

Rys. 6

1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1

Rys. 7

Wówczas każdy kwadrat o boku 2 lub 3 zawiera liczby o sumie podzielnej przez 3, podczas gdy suma liczb wpisanych w pola dużego kwadratu przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Za miesiąc piąty sposób rozwiązania.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl