Zadania o Ziemi

W dobrym przybliżeniu Ziemia jest kulą – bryłą o nieskomplikowanej, lecz interesującej geometrii. Niektóre, nawet dobrze znane właściwości geometryczne kształtu kulistego wciąż jednak nas zaskakują. Hugo Steinhaus pisał, że glob ziemski jest „niepraktycznie zbudowany". To prawda, ale dzięki temu matematycy mają co robić, choćby i wymyślać łamigłówki takie jak ta, powszechnie znana.

Zadanie 1. Wyszedłem z namiotu, poszedłem 1 km na południe, potem 1 kilometr na zachód. Idąc teraz stale na północ, wróciłem do punktu wyjścia i ku swojemu przerażeniu zauważyłem, że niedźwiedź wyjadł mi wszystkie zapasy żywności. Jakiego koloru był ten niedźwiedź? Oczywiście białego, bo taka wędrówka możliwa jest tylko w okolicach biegunów. Na biegunie południowym nie ma niedźwiedzi, a te w okolicy bieguna północnego są białe.

Przypomnijmy rozmiary Ziemi. Będziemy przyjmować, że jest ona kulą o promieniu 6371 km. W rzeczywistości Ziemia jest nieco spłaszczona wzdłuż osi biegunowej. Jej promień równikowy wynosi 6378,160 km, a biegunowy 6356,775 km. W tej sytuacji podany tu „promień kuli" jest promieniem kuli o takiej objętości, jaką naprawdę ma Ziemia.

Wiemy, że bieguny na Ziemi mają szerokość geograficzną 90 stopni, ale nie mają żadnej długości geograficznej. Południki zbliżają się do siebie i schodzą się w jeden punkt – właśnie biegun. Równoleżniki mają różną długość (zawsze $2\pi r$, ale im bliżej bieguna, tym mniejsze jest r). Najdłuższy jest oczywiście równik.

Zadanie 2. Obliczyć długość równoleżnika o szerokości geograficznej α. Który z równoleżników jest o połowę krótszy niż równik? Jaką długość ma równoleżnik przechodzący przez Twoją miejscowość? Ile kilometrów jest z Twojej miejscowości do bieguna północnego? Do bieguna południowego?

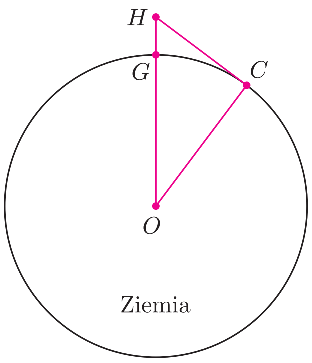
Rozwiązanie. Dojdź do niego sam(a). Narysuj Ziemię w przekroju, od Arktyki do Antarktydy. Wtedy równoleżnik (niech będzie on na półkuli północnej) stanie się cięciwą tego koła. Połącz środek koła z biegunem północnym i punktem końcowym cięciwy. Widzisz, gdzie utworzył się kąt prosty, prawda? Przypomnij sobie teraz, co to jest szerokość geograficzna i co to jest kosinus. Wyliczysz, że promień szukanego równoleżnika to $R\cos\alpha$, gdzie R jest promieniem Ziemi. Zatem długością równoleżnika jest $2\pi R\cos\alpha$. O połowę krótszy niż równik jest równoleżnik 60°. Rozstrzygnij następne pytania.

Zadanie 3. Z lotniska w Balicach wystartował samolot. Poleciał 222 km na północ, potem 222 km na wschód, 222 km na południe i 222 km na zachód. Gdzie wylądował?

W tym punkcie, z którego wystartował? Oczywiście, że… nie. Wskazówka: na wschód i zachód lecimy wzdłuż równoleżników, które mają różną długość…

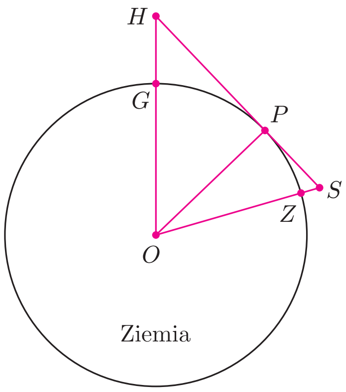
Wszyscy wiemy, że Balice to lotnisko krakowskie, a do rozwiązania zadania potrzebna jest nam szerokość geograficzna tego lotniska. Przyjmijmy $\phi = 50$ stopni (naprawdę jest to kilkanaście sekund kątowych więcej). Pamiętamy, że jeden stopień długości geograficznej na równiku jest równy 111 km. Przyjęliśmy, że Ziemia jest kulą, a zatem jeden stopień na południku jest też równy 111 km, a więc 222 km południka to 2 stopnie.

Musimy znać długość d_{50} równoleżnika 50° oraz długość d_{52} równoleżnika 52°. Mamy $d_{50} = 2\pi R \cos\phi$, gdzie $\phi = 50°$, a R jest promieniem Ziemi, $R = 6371$ km, natomiast $d_{52} = 2\pi R \cos 52°$. Zatem $d_{50} = 25731$ km. Jeden stopień na tej szerokości to $\frac{25731}{360} = 71{,}5$ km. Natomiast $d_{52} = 24645$ km, więc jeden stopień na tej szerokości to 68,5 km. Samolot poleciał zatem 2 stopnie na północ. Znalazł się na 52 równoleżniku (z mapy możemy odczytać, że to okolice Łowicza), potem $\frac{222}{68{,}5} = 3{,}24$ stopnia na wschód (trochę na płn.-zach. od Białej Podlaskiej) i 2 stopnie na południe (wtedy znalazł się między Jarosławiem i Lubaczowem). Był teraz 3,24 stopnia od Krakowa, czyli $3{,}24 \cdot 71{,}5 = 231{,}7$ km. Po przeleceniu 222 km w kierunku zachodnim znalazł się zatem o prawie 10 km na wschód od Balic. Jeśli lądował, to gdzieś na polu pod Batowicami…



Zadanie 4. Ile jest równy promień horyzontu na Ziemi?

Odpowiedź zależy oczywiście od wysokości patrzącego. Przyjmijmy, że ma on oczy na wysokości h metrów, w punkcie H. Niech R będzie promieniem Ziemi, O – środkiem Ziemi, HC odległością horyzontu. Z trójkąta prostokątnego OCH mamy $HC^2 = OH^2 - OC^2$, czyli $HC^2 = (R+h)^2 - R^2 = 2Rh + h^2$. Jeśli np. $h = 1{,}5$ m, to $HC \approx 4372$ km. Ale dwumetrowy mężczyzna, mający oczy na wysokości 1,90 m widzi o 550 metrów dalej. Dla niego horyzont jest odległy o 4920 metrów. Jeżeli wzniesiemy się na 10 km nad równinę, to nasz promień widzenia będzie już znaczny, około 357 km.



Zadanie 5. Miłośnicy Tatr wiedzą, że widać je już z Krakowa. Obliczmy, na jaką wysokość trzeba się wzbić nad Gdańsk, żeby zobaczyć wierzchołek Świnicy (2301 m). Na rysunku obok punkt G to Gdańsk, S – Świnica. Przyjmujemy, że Gdańsk leży na poziomie morza i że odległość „w poziomie” między Gdańskiem a Świnicą jest równa 575 km. Chcemy obliczyć długość odcinka GH. Przyjmiemy, że długość okręgu koła wielkiego przechodzącego przez Gdańsk i Świnicę jest równa 40000 km. Kąt środkowy GOZ na rysunku obok ma zatem $\frac{575}{40000} \cdot 2\pi \approx 0{,}0903$ radianów. Kąty OPH i OPS są proste, zatem $\cos\sphericalangle POS = \frac{R}{R+2{,}3\text{ km}}$. Wyznaczamy stąd (za pomocą kalkulatora), że kąt POS ma 0,0269 radianów, zatem kąt HOP ma 0,0634 radiany. Obliczamy stąd $GH = \frac{R}{\cos\sphericalangle HOP} - R \approx 12{,}8$ km. Już z niespełna 13 kilometrów znad Gdańska widać wierzchołki Tatr. Nie są to wcale tylko wyliczanki teoretyczne. Piszący te słowa widział bardzo wyraźnie cały łańcuch Tatr z samolotu tuż po wylocie z Warszawy w stronę Wrocławia 24 listopada 2002 roku. Wspomnijcie to, gdy będziecie patrzeć ze Świnicy na północ.

Małą Deltę przygotował Michał SZUREK