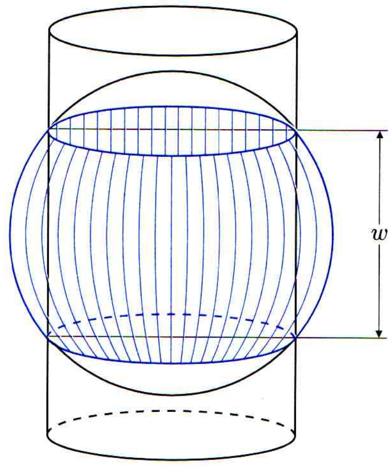
mała delta

Obrączka

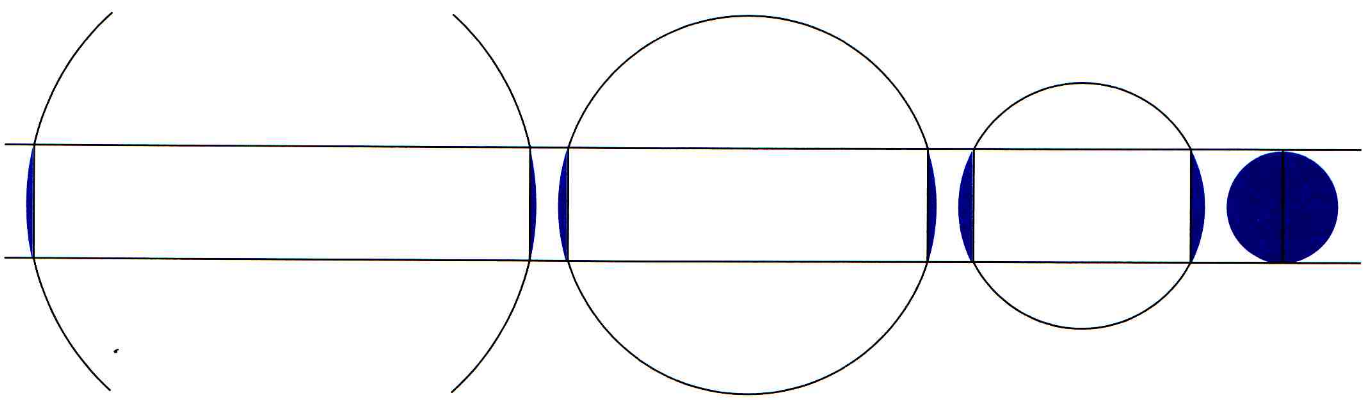
Jest teraz moda na zadania tekstowe, bo (niezależnie od tego, jak absurdalna jest ich treść) uważa się je za zastosowania matematyki w życiu praktycznym. Oto przykład.

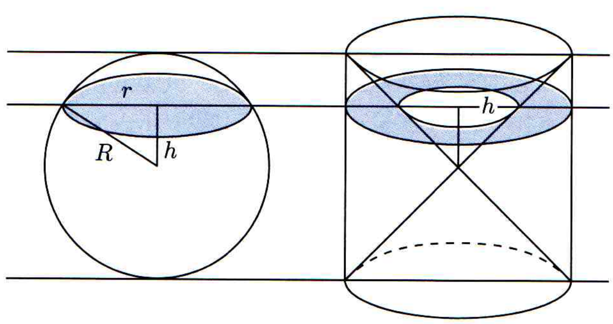


Tak powstaje obrączka.

Kandydatka na pannę młodą jest osobą praktyczną i chce wydać jak najmniej na obrączki. Rozważa więc problem, jakiej grubości palec pana młodego będzie najkorzystniejszy, by wybrać oblubieńca zgodnie z tym kryterium. Obrączki zaprzyjaźniony z nią złotnik wykonuje według następującego przepisu: wszystkie mają wysokość w, a ich zewnętrzne zakrzywienie dobiera się w zależności od grubości palca tak, aby były one różnicą walca (palca) i odpowiednich rozmiarów kuli. Jakiej grubości palec pana młodego najlepiej spełni oczekiwania wymagającej panny?

Spróbujmy rozstrzygnąć przedślubne wątpliwości. W tym celu zastanówmy się, przy jakim promieniu kuli największa jest objętość obrączki wyciętej przez walec tak, aby jej wysokość była równa w. Rysunek poniżej ilustruje nieoczywistość pytania: im promień większy, tym obrączka o danej wysokości cieńsza, choć „dłuższa".





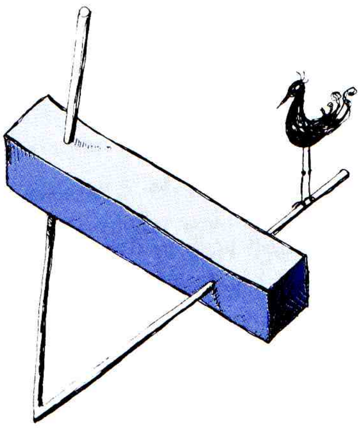
Obliczymy objętość warstwy o wysokości w i odejmiemy od niej objętość walca o tej samej wysokości.

Archimedes zaproponował, aby do takich obliczeń użyć, obok kuli, walca opisanego na kuli – ma on przekrój osiowy będący kwadratem – ale wydrążonego w ten sposób, że wyjmujemy z niego stożki, których tworzące są przekątnymi przekrojów osiowych walca.

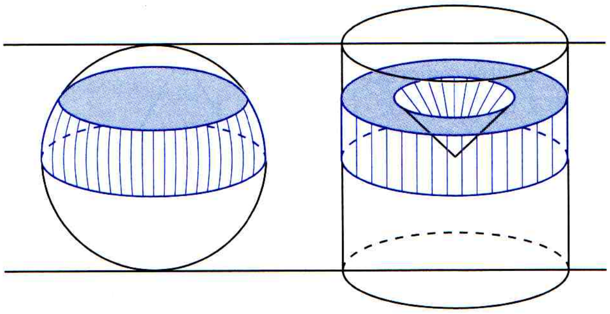
Zauważył on mianowicie, że kula i wydrążony walec, przecięte dowolną płaszczyzną równoległą do podstaw walca, mają przekroje o równych polach. Istotnie, dla przekroju odległego o h od środka kuli mamy

$$\pi r^2 = \pi(R^2 - h^2) = \pi R^2 - \pi h^2;$$

z lewej mamy pole przekroju kuli (czyli koła), z prawej pole przekroju wydrążonego walca, czyli różnicy dwóch kół.



Jeśli teraz skorzystać z faktu, że dwie bryły, mające w przecięciu dowolną spośród płaszczyzn równoległych przekroje o równych polach, mają równe objętości, to można znaleźć objętość dowolnej warstwy kuli. Spostrzeżenie powyższe nazywa się *zasadą Cavalieriego*, choć wymyślił to 2000 lat wcześniej Archimedes. Uzasadniał on ten pogląd pisząc, że gdyby owe bryły były pustymi naczyniami i nalewano by do nich wodę, to w każdym momencie tyle samo wody potrzeba by było na kolejną warstewkę, a więc poziom wody podnosiłby się w obu bryłach w tym samym tempie, a wobec tego napełniłyby się one równocześnie, czyli mieściłyby tyle samo wody, a zatem mają tę samą objętość. To rozumowanie doskonale nadaje się do matematycznego uściślenia, co spowodowało, że zasada Cavalieriego jest uznanym twierdzeniem matematyki.



Posługując się nią, najpierw obliczymy objętość $W(h)$ warstwy o wysokości h z jednej strony ograniczonej płaszczyzną równika. Będzie to objętość walca z wyjętym stożkiem, czyli

$$W(h) = \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Każda inna warstwa to suma lub różnica takich warstw.

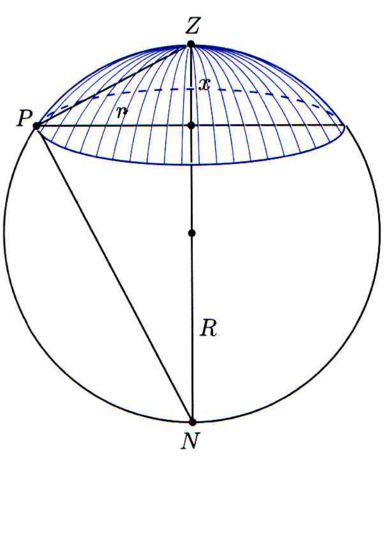
W szczególności obrączka to suma dwóch takich warstw o wysokości $\frac{1}{2}w$ minus walec o wysokości w i promieniu podstawy $r = \sqrt{R^2 - (\frac{1}{2}w)^2}$.

Wobec tego objętość obrączki obliczamy tak:

$$2 \cdot \left(\pi R^2 \cdot \frac{1}{2}w - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}w\right)^3\right) - \pi\left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}w\right)^2}\right)^2 w = \frac{1}{6}\pi w^3.$$

Okazuje się, że ilość złota potrzebna do wykonania obrączki według podanego przepisu zależy jedynie od wysokości obrączki, a nie zależy w szczególności od grubości palca oblubieńca. Zatem nasza oszczędna kandydatka na pannę młodą będzie musiała znaleźć inne kryterium pozwalające jej dokonać wyboru.

Skoro już rozwiązaliśmy – zgodnie z zaleceniami podstawy programowej – zadanie praktyczne, możemy powrócić do teorii.



Równość

$$r^2 = (2R - x)x$$

wynika z faktu, że trójkąt ZPN jest prostokątny.

Powodem, dla którego Archimedes znalazł wzór na objętość warstwy, było znalezienie wzoru na objętość kuli. Jest ona przecież równa podwojonej objętości warstwy o wysokości R. Zatem jest ona równa

$$2W(R) = 2\left(\pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Z ciekawszych warstw warto jeszcze zainteresować się czaszą. Jak łatwo zauważyć, jest to różnica warstwy o wysokości R (czyli półkuli) i warstwy o wysokości $R - x$, gdzie x to wysokość czaszy. Mamy zatem na objętość czaszy wzór

$$W(R) - W(R-x) = \frac{2}{3}\pi R^3 - \left(\pi R^2(R-x) - \frac{1}{3}\pi(R-x)^3\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \pi R^3 + \pi R^2 x + \frac{1}{3}\pi R^3 - \pi R^2 x + \pi R x^2 - \frac{1}{3}\pi x^3 =$$
$$= \pi R x^2 - \frac{1}{3}\pi x^3 = \frac{1}{2}\pi(2R-x)x^2 + \frac{1}{6}\pi x^3 = \frac{1}{2}\pi r^2 x + \frac{1}{6}\pi x^3.$$

Otrzymaliśmy więc nawet trzy, zapisane w ostatniej linijce, poręczne wzory.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS