Czterowymiarowa hipoteza Poincarégo czyli wyniki Freedmana

Ważnym problemem w matematyce jest klasyfikacja badanych obiektów. Rozmaitości będące przestrzeniami o specyficznych własnościach również zostały poddane klasyfikacji. Najprostsza jest klasyfikacja rozmaitości jednowymiarowych. Mamy dokładnie dwa przypadki: okrąg i prostą. W przypadku rozmaitości dwuwymiarowych, czyli powierzchni – tu i w dalszym ciągu ograniczymy się do rozmaitości zwartych – klasyfikacja również się powiodła; wszystkie można uzyskać ze sfery poprzez odpowiednie doklejanie rączek i zaklejanie wyciętych kołowych otworów. Rozmaitości trójwymiarowych do dziś nie udało się jeszcze sklasyfikować i nie wiadomo, czy uda się to zrobić. Rozmaitości cztero- i wyżejwymiarowe nie mają klasyfikacji. Dokładniej, udowodniono, że nie istnieje algorytm pozwalający sklasyfikować te obiekty. Można jednak próbować klasyfikować bardziej specjalne rodziny rozmaitości. Jedną z najprostszych takich klas jest rodzina rozmaitości jednospójnych. Jednospójność przestrzeni oznacza, że każda pętla zawarta w tej przestrzeni może być w niej ściągnięta do punktu. Jednospójna jest prosta i koło; nie spełnia tego warunku okrąg oraz koło bez środka. Wydaje się, że rozmaitości jednospójnych nie ma zbyt wiele. Dla wymiaru jeden mamy tylko niezwartą prostą, dwuwymiarowa, zwarta i jednospójna jest tylko sfera. Przypuszcza się, że podobnie jest w przypadku rozmaitości trójwymiarowych – tylko sfera. Jest to jednak klasyczna hipoteza Poincarégo, problem do dziś nierozstrzygnięty mimo ogromnych wysiłków. Sytuacja gwałtownie się zmienia w czterech wymiarach – istnieje całe mnóstwo jednospójnych rozmaitości czterowymiarowych (i, pamiętajmy, zwartych) na czele ze sferą czterowymiarową. Innym przykładem jest $S^2 \times S^2$. Właśnie Michael H. Freedman dokonał ich klasyfikacji w 1982 roku. Zauważył on, że każdej jednospójnej czterowymiarowej rozmaitości odpowiada tzw. „forma przecięcia" – coś w rodzaju iloczynu skalarnego. Więcej, pokazał wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość (z dokładnością do pewnych szczegółów) między takimi formami i jednospójnymi rozmaitościami czterowymiarowymi. „Iloczyny skalarne" i związane z nimi macierze klasyfikuje się dużo łatwiej. Wynik ten był wielkim sukcesem w topologii rozmaitości, a jego konsekwencje okazały się sensacyjne. Najpierw z tej klasyfikacji Freedman wyprowadził dowód czterowymiarowego odpowiednika hipotezy Poincarégo, ostatniego obok trójwymiarowego nierozstrzygniętego przypadku hipotezy. Dalej okazało się, że istnieje obszerna rodzina czterowymiarowych rozmaitości jednospójnych, które nie dopuszczają gładkiej struktury. „Niewygładzalne" rozmaitości znane już były wcześniej, ale były to skomplikowane wysokowymiarowe przykłady, a tu okazało się, że niemal w zasięgu ręki są takie dziwaczne obiekty. I wreszcie, pewne szczegóły dowodów podsunęły Donaldsonowi sugestie istnienia egzotycznego $\mathbb{R}^4$.

Zdzisław POGODA

Egzotyczne $\mathbb{R}^4$, czyli wyniki Donaldsona

Czy składając w jedną całość mapy powierzchni Ziemi możemy otrzymać obraz przedstawiający coś zupełnie innego, niż oczekujemy, np. powierzchnię jakiejś abstrakcyjnej planety? Wydaje się, że to zupełnie absurdalne. A jednak coś podobnego zdarzyło się w matematyce.

Rozmaitość jest to przestrzeń (topologiczna) lokalnie przypominająca odpowiednią przestrzeń euklidesową. Czyli obiekt jest rozmaitością np. czterowymiarową, gdy każdy jego punkt ma otoczenia homeomorficzne z przestrzenią $\mathbb{R}^4$. Każde takie otoczenie, wraz z odpowiednim homeomorfizmem, nazywamy mapą – podobnie jak w geografii. I dalej konsekwentnie zbiór map nazywamy atlasem. Każdy atlas wyznacza na rozmaitości strukturę tejże.

Jeśli teraz zażądamy, żeby przejście od jednej mapy do drugiej odbywało się w sposób gładki, to mówimy, że na rozmaitości zadana jest struktura różniczkowa, a rozmaitość nazywamy różniczkową (lub różniczkowalną) albo gładką. Jeśli natomiast pozostaniemy przy poprzednich założeniach, to mamy do czynienia z rozmaitością topologiczną. Na każdej rozmaitości topologicznej wymiaru jeden, dwa i trzy zawsze można wprowadzić strukturę różniczkową. W wyższych wymiarach zaczynają się kłopoty, ale uważano, że jeśli struktura różniczkowa istnieje, to jest już wyznaczona jednoznacznie, co najwyżej z dokładnością do pewnej równoważności. Sensację wywołał rezultat J. Milnora z 1957 roku, że na sferach począwszy od siedmiowymiarowej istnieją struktury różniczkowe całkowicie nierównoważne. A jak jest w przypadku najprostszych rozmaitości – przestrzeni euklidesowych $\mathbb{R}^n$? Tu nie było sensacji, choć dowód okazał się zadziwiająco trudny. Dokonali tego w 1977 roku R. Kirby i L. Siebenmann z jednym drobnym wyjątkiem $n = 4$. W 1983 roku okazało się, że ten wyjątek jest szczególnie wyjątkowy. Simon Donaldson, formułując kryteria istnienia struktur różniczkowych na rozmaitościach czterowymiarowych, pokazał, że na $\mathbb{R}^4$, oprócz standardowej, istnieje jeszcze inna struktura, nazwana egzotyczną. Mówiąc bardzo nieściśle, można dobrać taki układ map, że po ich złożeniu powstanie coś, co topologicznie jest $\mathbb{R}^4$, ale różniczkowo zachowuje się zupełnie inaczej. Więcej, cztery lata później pokazano (C.H. Taubes), że takich nierównoważnych struktur na $\mathbb{R}^4$ jest nieprzeliczalnie wiele. Donaldson uzyskał swoje rezultaty, wykorzystując metody geometrii różniczkowej i algebraicznej, teorii równań różniczkowych i… fizyki teoretycznej, a dokładniej teorii pól Yanga–Millsa. Istotny wpływ na jego prace miały niemniej sensacyjne wyniki Michaela H. Freedmana.

Zdzisław POGODA