12/03 (72)

Γlimatias $_{n\to\infty}$

KOLOROWANKI – NUMEROWANKI (7)

Tym razem zastanówmy się nad możliwością pokrywania różnych figur prostokątami 2×3.

Dla prostokątów zadanie okazuje się proste. Jeżeli pole prostokąta nie jest podzielne przez 6, to nie można go pokryć prostokątami o polu 6.

Z kolei każdy prostokąt o polu podzielnym przez 6 spełnia co najmniej jeden z następujących warunków:

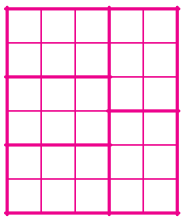
1° Jeden z boków prostokąta jest podzielny przez 2, a drugi przez 3. Wówczas podział na prostokąty 2×3 jest oczywisty.

2° Prostokąt ma bok podzielny przez 6. Jeżeli drugi bok ma długość 1, to oczywiście podział nie jest możliwy. W pozostałych przypadkach możliwość dokonania podziału wynika z podziału prostokąta 5×6 na prostokąty 2×3 (rys. 1).

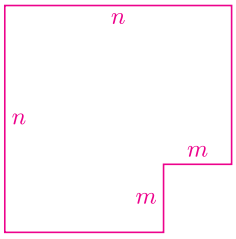
Można powiedzieć, że prostokąt daje się podzielić na prostokąty 2×3 zawsze wtedy, gdy nie ma trywialnych przyczyn niemożności dokonania takiego podziału: prostokąt jest za wąski lub jego pole nie jest podzielne przez 6.

A co będzie w przypadku trochę bardziej skomplikowanych figur?

Rozważmy w tym celu kwadrat o boku n z usuniętym narożnym kwadratem o boku m (rys. 2), gdzie n i m są względnie pierwsze z 6.



Rys. 1



Rys. 2

Jeżeli $m = 1$, to podział taki nie jest możliwy, gdyż nie możemy prostokątami 2×3 wypełnić szczelnie obszaru wokół usuniętego narożnego kwadracika. Przyjmijmy więc, że $m > 1$, czyli w konsekwencji $m \geqslant 5$.

Możliwość dokonania podziału zależy od reszt z dzielenia liczb n i m przez 6, zamiast więc prowadzić ogólne rozważania, zajmiemy się typowymi przykładami.

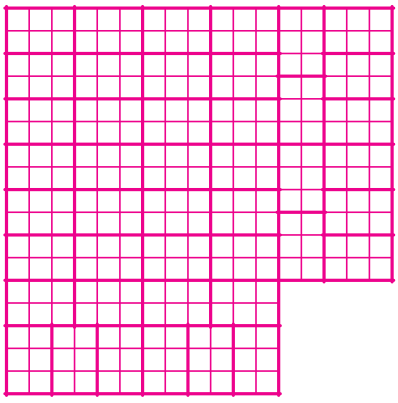
Dla $n = 17$, $m = 5$ podział jest możliwy (rys. 3). Podobnie w przypadku, gdy liczba $n - m$ jest podzielna przez 6, dokonujemy podziału figury najpierw na prostokąty o szerokości 6, a te z kolei dzielimy na prostokąty 2×3.

Dla $n = 19$, $m = 5$ pokrycie figury prostokątami 2×3 nie jest możliwe! Aby się o tym przekonać, ponumerujmy pola figury jak na rysunku 4.

Wówczas każdy prostokąt 1×3 pokrywa pola o sumie (tzn. sumie liczb wpisanych w te pola) równej zeru. Jednak suma wszystkich liczb wpisanych w pola figury jest równa 1, co dowodzi, że z prostokątów 1×3 złożyć jej się nie da, a tym bardziej z prostokątów 2×3.

Podobna numeracja pokazuje niemożliwość dokonania podziału na prostokąty 1×3 dla $n = 17$, $m = 7$, my jednak dla urozmaicenia prezentujemy nieco odmienny sposób ponumerowania pól (rys. 5). Również w tym przypadku suma liczb wpisanych w pola figury jest równa 1, a każdy prostokąt 2×3 pokrywa pola o sumie 0.

Zupełnie analogiczne ponumerowanie pól dowodzi, że w przypadku, gdy liczba $n - m$ nie jest podzielna przez 6, podział opisanej figury na prostokąty 2×3, a nawet na prostokąty 1×3, nie jest możliwy.



Rys. 3

1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1
–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1
0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0
1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1
–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1
0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0
1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1
–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1
0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0
1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1
–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1
0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0
1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1
–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1
0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1					
1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1					
–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0					
0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1					
1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1					

Rys. 4

–2	2	–1	0	0	1	–2	2	–1	0	0	1	–2	2	–1	0	0	
2	–2	1	0	0	–1	2	–2	1	0	0	–1	2	–2	1	0	0	
–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	
0	0	1	–2	2	–1	0	0	1	–2	2	–1	0	0	1	–2	2	
0	0	–1	2	–2	1	0	0	–1	2	–2	1	0	0	–1	2	–2	
1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	
–2	2	–1	0	0	1	–2	2	–1	0	0	1	–2	2	–1	0	0	
2	–2	1	0	0	–1	2	–2	1	0	0	–1	2	–2	1	0	0	
–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	
0	0	1	–2	2	–1	0	0	1	–2	2	–1	0	0	1	–2	2	
0	0	–1	2	–2	1	0	0	–1	2								
1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1								
–2	2	–1	0	0	1	–2	2	–1	0								
2	–2	1	0	0	–1	2	–2	1	0								
–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1								
0	0	1	–2	2	–1	0	0	1	–2								
0	0	–1	2	–2	1	0	0	–1	2								

Rys. 5

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl