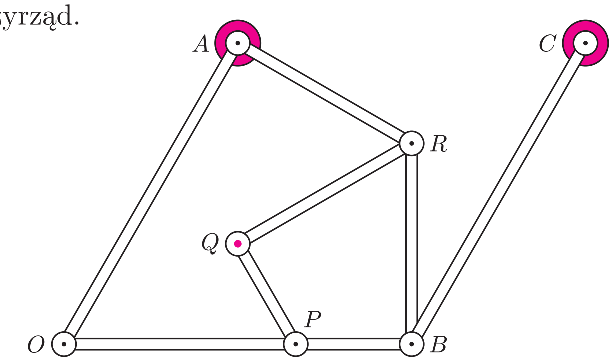
Jak narysować linię prostą?

Płaski mechanizm przegubowy (będę nazywał go PMP) to urządzenie składające się ze sztywnych prostych prętów leżących na płaszczyźnie i połączonych przegubami, które pozwalają się obracać temu czy innemu prętowi względem innego. Urządzenie takie będzie przymocowywane do płaszczyzny na ogół w dwóch punktach, co utrudni mu poruszanie się, powodując, że poszczególne jego punkty będą poruszały się po krzywych. Okazuje się, że dla dowolnej krzywej algebraicznej (to znaczy opisanej przez wielomian) można zbudować PMP, którego wskazany punkt będzie zakreślał (rysował, gdy go odpowiednio wyposażymy) tę krzywą (Kempe, nawiasem mówiąc prawnik, 1875). Tytuł tego tekstu też jest wzięty z pracy tegoż Kempego – w oryginale brzmiał on *How to draw a straight line* (1877). Bo jeśli można narysować dowolną krzywą, to powinny istnieć PMPy rysujące proste. Prace nad PMPami miały początkowo służyć udoskonaleniu silników parowych.

Oto taki przyrząd.



Przymocowane do podłoża są punkty oznaczone dużymi kolorowymi kółkami (a więc A i C), prostą przy poruszaniu prętami będzie rysować mały kolorowy punkt (a więc Q). Pozostałe kółka to przeguby. Aby PMP działał jak trzeba, pręty OA, OB i BC powinny być tej samej długości i taki powinien też być odstęp punktów zamocowania. Ponadto ma być $RA = RB = RQ$, punkt zaś P ma być tak dobrany na OB, aby deltoidy $OARB$ i $RBPQ$ były podobne (czyli $BP = \dfrac{BR^2}{BO}$).

Dlaczego punkt Q porusza się po prostej? Otóż dlatego, że stale leży na prostopadłej do AC poprowadzonej w punkcie A.

Sprawdźmy, czy istotnie kąt CAQ jest prosty. Oznaczmy $\alpha = \sphericalangle AOB$. Wobec tego $\sphericalangle OBC = 180° - \alpha$. Oznaczmy $\beta = \sphericalangle ARB$. Wówczas

$$\sphericalangle PBR = \frac{1}{2}(360° - \alpha - \beta) = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

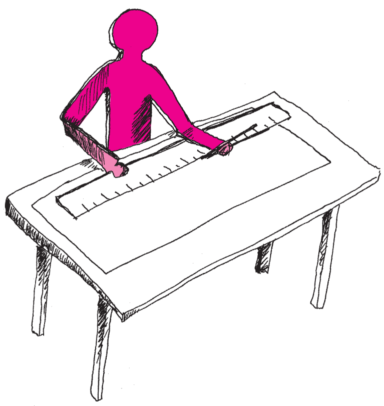
Zatem

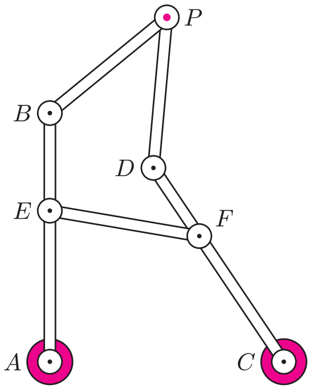
$$\sphericalangle RAC = \sphericalangle RBC = \sphericalangle OBC - \sphericalangle PBR = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Z kolei $\sphericalangle QRB = \beta - \alpha$, więc – ponieważ trójkąt ARQ jest równoramienny – mamy

$$\sphericalangle QAR = \frac{1}{2}(180° - \beta + \alpha) = 90° - \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

A zatem, jak oczekiwaliśmy, $\sphericalangle QAR + \sphericalangle RAC = 90°$.





Przedstawiony PMP do kreślenia prostej składał się z siedmiu prętów. Minimalna liczba prętów potrzebnych do skonstruowania kreślącego prostą PMP to pięć. Obok przedstawiony jest PMP do kreślenia prostej (Hart, 1874), zbudowany z pięciu prętów.

Jak widać zamocowane punkty to A i C, a prostą kreśli punkt P. Aby tak było rzeczywiście, potrzebne są następujące zależności między długościami prętów:

$$BE \cdot BA = BP^2 = EF^2 = DP^2 = DF \cdot DC,$$

$$AE = CF, \tag{1}$$

$$BA = AC = CD.$$

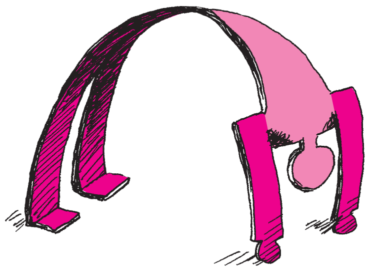
Przyrząd więc jest zbudowany symetrycznie, choć przeważnie nie zajmuje symetrycznego położenia. Ale każe się to nam domyślać, dlaczego punkt P porusza się po prostej: on stale leży na symetralnej odcinka AC.

O dziwo, dowód tego faktu jest dość pokrętny, choć korzysta tylko z własności trójkątów podobnych.

Oto ten dowód. Mamy

$$\frac{BE}{BP} = \frac{BP}{BA} \qquad \frac{DF}{DP} = \frac{DP}{DC},$$

skąd wynika, że



$$\Delta BEP \sim \Delta BPA \qquad \text{oraz} \qquad \Delta DFP \sim \Delta DPC,$$

bo każda z par trójkątów ma kąt wspólny. Stąd otrzymujemy

$$\frac{EP}{PA} = \frac{BP}{BA} = \frac{DP}{DC} = \frac{FP}{PC}, \quad \text{czyli} \quad \frac{EP}{FP} = \frac{AP}{CP}. \tag{2}$$

Ponadto, podstawiając EF za BP i DP oraz AC za BA i DC, po zamianie „wyrazów środkowych” proporcji mamy także

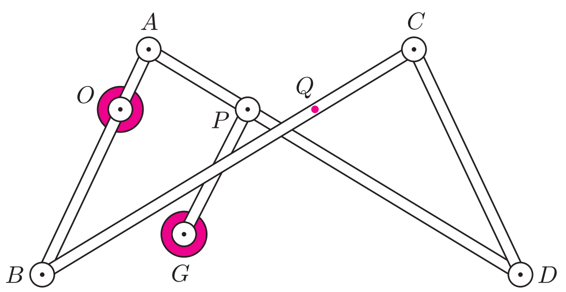
$$\frac{EP}{EF} = \frac{AP}{AC} \qquad \text{i} \qquad \frac{FP}{EF} = \frac{CP}{AC}.$$

Zatem $\Delta EFP \sim \Delta ACP$, skąd

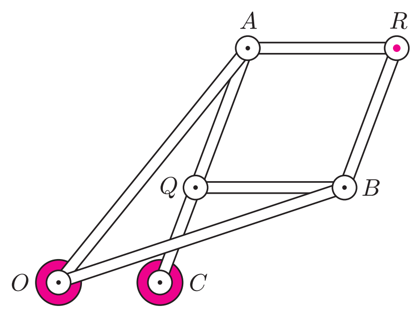
$$\sphericalangle EFP = \sphericalangle APC, \qquad \text{co daje} \qquad \sphericalangle EPA = \sphericalangle FPC.$$

Ta równość kątów razem z (2) powoduje, że $\Delta APE \sim \Delta CPF$, a to, wobec (1), pociąga za sobą $\Delta APE \equiv \Delta CPF$ i w konsekwencji $AP = CP$, o co nam chodziło.

Na zakończenie jeszcze dwa PMP rysujące proste. Tu w dowodzie poprawności ich działania istotnie pomaga znajomość pojęcia *inwersja*. Ten z lewej też jest złożony z pięciu prętów (też Hart, 1874). Ten z prawej zaś to najstarszy PMP rysujący proste. Skonstruował go w 1864 roku Peaucellier, oficer francuski.



Musi być $AB = CD$, $AD = BC$, punkty O, P, Q są obrane na prostej równoległej do AC (podczas ruchu ta własność się zachowuje), $OG = PG$; uwaga: prostą rysuje punkt Q, w którym nie ma przegubu!



Tutaj $OA = OB$, $QA = QB = RA = RB$, ponadto $OC = QC$.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS