Na ile obszarów krzywa algebraiczna może dzielić płaszczyznę?

Themistocles M. RASSIAS, Grecja

Będziemy zajmować się oszacowaniem liczby obszarów, na jakie krzywa algebraiczna dzieli płaszczyznę. Zagadnienie to związane jest z 16. Problemem Hilberta. Problem oszacowania liczby takich obszarów w przypadku wielomianów o większej liczbie zmiennych niż 2 jest wciąż otwarty.

Zacznijmy od spostrzeżenia, że liczba obszarów, na jakie m prostych $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_m$ dzieli płaszczyznę, jest równa co najwyżej $1 + \frac{m(m+1)}{2}$.

Stwierdzenie to ma dowód indukcyjny, a wymienione wyżej oszacowanie jest najlepsze z możliwych – można je osiągnąć. Okazuje się, że identyczne ograniczenie da się uzyskać w sytuacji, gdy rozważamy krzywą algebraiczną zdefiniowaną przez wielomian stopnia m.

Twierdzenie. Niech $f(x,y)$ będzie wielomianem stopnia m. Wówczas zbiór

$$Z_f = \{(x,y) \in R^2 : f(x,y) = 0\}$$

dzieli płaszczyznę na co najwyżej $1 + \frac{m(m+1)}{2}$ obszarów.

Dowód składa się z dwóch części. W pierwszej rozpatruje się wielomian nierozkładalny, w drugiej – rozkładalny. W tym artykule zaprezentujemy jedynie szkic dowodu w pierwszym przypadku.

Jeśli $m = 1$, to Z_f dzieli płaszczyznę na dokładnie dwa obszary. Gdy $m = 2$, to łatwo spostrzec, że Z_f dzieli płaszczyznę na 2 lub 3 obszary. Wystarczy zatem rozważyć problem dla $m > 2$.

Na początek wprowadzimy kilka przydatnych pojęć. Jeśli P jest takim punktem na płaszczyźnie, że $f(P) = 0$, to przez przesunięcie zawsze możemy umieścić punkt P w początku układu współrzędnych. Możemy zatem założyć, że $P = (0,0)$. Mamy więc $f(0,0) = 0$ oraz

$$f(x,y) = ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + \ldots,$$

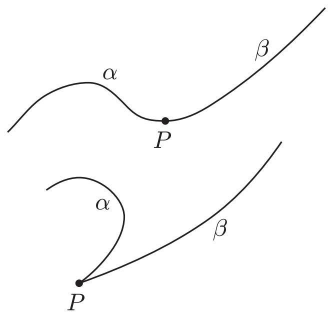
gdzie $a, b, c, \ldots$ są liczbami rzeczywistymi. Punkt $(0,0)$ będzie nazywany **punktem prostym** zbioru Z_f, gdy $a \neq 0$ lub $b \neq 0$. W przeciwnym wypadku punkt P będzie zwany **osobliwym**. (Dopuścimy sytuację, gdy pewne punkty osobliwe leżą na „prostej w nieskończoności” – l_∞, czyli są kierunkami.)

Jeśli wielomian f ma postać

$$f(x,y) = f_r(x,y) + f_{r+1}(x,y) + \ldots + f_m(x,y),$$

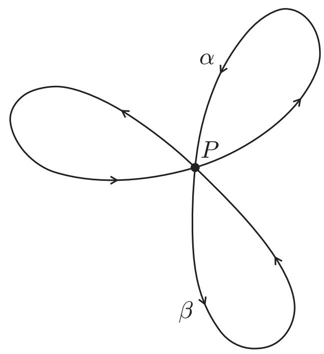
gdzie $f_r, f_{r+1}, \ldots, f_m$ są jednorodnymi wielomianami stopnia $r, r+1, \ldots, m$ oraz $f_r \neq 0$, to punkt $(0,0)$ nazywany jest **punktem r-krotnym**.

Zauważmy teraz, że w każdym nieizolowanym punkcie krzywej spotykają się przynajmniej dwa łuki tworzące gałąź krzywej (rys. 1). Umówmy się, że wchodząc do danego punktu P wzdłuż pewnego łuku α opuszczamy go wzdłuż innego łuku, powiedzmy β.



Rys. 1

Punktów osobliwych i gałęzi przez nie przechodzących jest skończenie wiele, więc ostatecznie wracamy do punktu P po zamkniętej drodze, którą zwać będziemy **cyklem**. Przykładowy cykl przedstawia rysunek 2.



Rys. 2

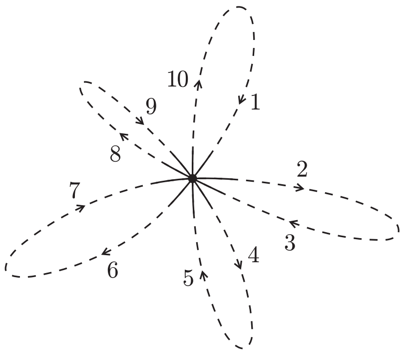
W dalszym ciągu potrzebne będzie nam ogólne twierdzenie, które określa maksymalną liczbę cykli krzywej określonej przez nierozkładalny wielomian f.

Fakt. Każda krzywa określona przez nierozkładalny wielomian stopnia m, do której należy punkt r_1-krotny, r_2-krotny, itd., ma nie więcej niż

$$N = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{1}{2}\sum_i r_i(r_i - 1) + 1$$

cykli.

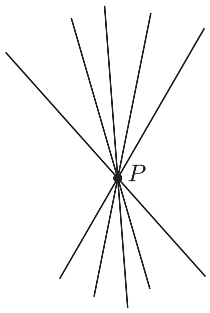
Cykl – jak to widać z rysunku 2 – może się przecinać. W każdym punkcie cyklu spotyka się parzysta liczba łuków, przy czym w punkcie r-krotnym jest ich co najwyżej $2r$. Ponumerujmy teraz łuki wokół punktu P kolejnymi liczbami naturalnymi zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Gdy P jest punktem r-krotnym cyklu, przechodzić będzie przez niego $2s \leqslant 2r$ łuków. Obejdziemy teraz cały cykl w ten sposób, że idąc do punktu P wzdłuż łuku numer i, wyjdziemy wzdłuż łuku numer $i + s \pmod{2s}$. Przeprowadzamy tę procedurę dla wszystkich punktów osobliwych i wszystkich cykli. Przykładowa droga wygląda więc tak jak na rysunku 3, gdzie w wykropkowanych fragmentach trafiać się mogą punkty osobliwe.



1, 6, 7, 2, 3, 8, 9, 4, 5, 10

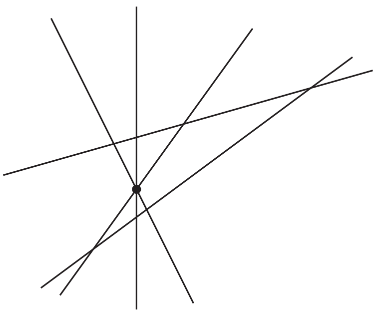
Rys. 3

W ten sposób w małym otoczeniu punktu P sytuacja wygląda tak, jak gdyby przecięty został on przez s prostych (rys. 4).



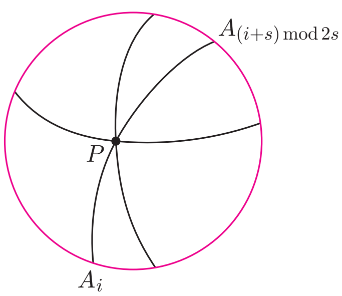
Rys. 4

Jeśli teraz rozsuniemy nieco te proste (rys. 5), to oczywiście liczba obszarów, na jakie dzielą one płaszczyznę, raczej wzrośnie niż zmaleje.

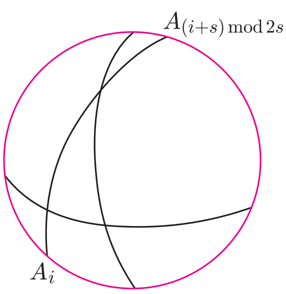


Rys. 5

Gdyby ktoś miał wątpliwości, może spojrzeć jeszcze na rys. 6a oraz 6b, gdzie na rys. 6a narysowane kółko jest tak małe, że żadne dwie gałęzie nie przecinają się poza punktem P.



Rys. 6a



Rys. 6b

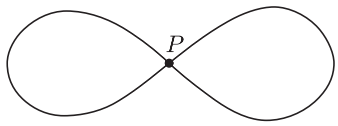
W ten sposób punkt k-krotny zastępujemy przez $\frac{s(s+1)}{2}$ przecięć prostych, gdzie $s \leqslant r$.

Skorzystamy teraz ze wzoru Eulera dla spójnych grafów na płaszczyźnie:

$$v - e + f = 2,$$

gdzie v to liczba wierzchołków, e – krawędzi, a f – obszarów. Na przykład dla rysunku 7 mamy:

$$v = 1, \quad e = 2, \quad f = 3 \;\text{ i }\; v - e + f = 1 - 2 + 3 = 2.$$



Rys. 7

W przypadku połączonych cykli zawierających punkt r_1-krotny, r_2-krotny, itd., otrzymujemy graf, dla którego zachodzi szacowanie

$$v \leqslant \frac{1}{2}\sum_i r_i(r_i + 1).$$

Jeśli teraz zastąpimy – zgodnie z przedstawionym wyżej schematem – naszą krzywą przez odpowiednią liczbę zamkniętych dróg z jednokrotnymi przecięciami, to bez trudu wykażemy indukcyjnie, że

$$e = 2v.$$

Stąd ze wzoru Eulera mamy

$$f = 2 + e - v = 2 + 2v - v = 2 + v.$$

Jeśli zatem mamy połączonych N rodzin cykli, to

$$f = 1 + \sum_{i=1}^{N}(1 + k_i) \leqslant 1 + N + \sum_{i=1}^{N} k_i,$$

gdzie k_i jest liczbą wierzchołków w danej rodzinie połączonych cykli. Zauważmy, że w pierwszej sumie składniki mają postać $1 + k_i$ zamiast $2 + k_i$, co wynika z tego, że wszystkie cykle mają wspólny obszar, który dodaliśmy osobno. Mamy ponadto

$$k_i \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,j} r_{ij}(r_{ij} - 1).$$

Uwzględniając teraz sposób, w jaki krzywa przecina prostą w nieskończoności l_∞, dodajemy m obszarów i ostatecznie korzystając z Faktu uzyskujemy

$$f \leqslant \left\{1 + \left[\frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2}\sum_{i,j} r_{ij}(r_{ij} - 1) + 1\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{i,j} r_{ij}(r_{ij} - 1) + m\right\},$$

czyli

$$f \leqslant \frac{1}{2}(m-1)(m-2) + m + 2 \leqslant 1 + \frac{1}{2}m(m+1),$$

gdzie ostatnia nierówność zachodzi dla $m \geqslant 2$. W ten sposób dowód w pierwszym wypadku (nierokładalnego wielomianu) został zakończony.

Tłumaczył Witold SADOWSKI