Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2004

UWAGA!

ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 483, 484

Redaguje Marcin E. KUCZMA

483. Wykonujemy ciąg rzutów symetryczną monetą. Kończymy rzucanie, gdy po serii złożonej z nieparzystej liczby orłów pojawi się reszka. Obliczyć wartość oczekiwaną wykonanej liczby rzutów.

484. Dane są liczby naturalne m, n, przy czym $m \geqslant n$, oraz liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_m$ spełniające warunki

$$1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_m \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n.$$

Udowodnić nierówność

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2.$$

Zadanie 482 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2004

Przypominamy treść zadań:

475. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nie wszystkie równe zeru. Wykazać, że równanie

$$\sqrt{1+a_1x} + \sqrt{1+a_2x} + \ldots + \sqrt{1+a_nx} = n$$

(z niewiadomą x) ma nie więcej niż dwa pierwiastki rzeczywiste.

476. Niech $A_1, A_2, A_3, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem zbiorów czteroelementowych, z których żadne dwa nie są rozłączne. Udowodnić, że można znaleźć takie trzy elementy a, b, c, aby każdy ze zbiorów A_i zawierał co najmniej jeden z tych trzech elementów.

475. Przekształcamy równanie do kolejno równoważnych postaci:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1-\sqrt{1+a_ix}\right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_ix}{1+\sqrt{1+a_ix}} = 0;$$

$$x\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 0, \qquad (*)$$

gdzie

$$f_i(x) = \frac{a_i}{1+\sqrt{1+a_ix}}.$$

Dziedziną funkcji f_i jest pewien przedział J_i (dziedziną równania jest wspólna część przedziałów J_i dla $i = 1, \ldots, n$). Niech $x, y \in J_i$ i niech $x < y$. Wówczas

$$\sqrt{1+a_ix} - \sqrt{1+a_iy} \begin{cases} < 0 & \text{gdy } a_i > 0, \\ > 0 & \text{gdy } a_i < 0; \end{cases}$$

$$f_i(x) - f_i(y) \begin{cases} > 0 & \text{gdy } a_i > 0, \\ > 0 & \text{gdy } a_i < 0; \end{cases}$$

a to znaczy, że dla $a_i \neq 0$ funkcja f_i jest ściśle malejąca. Ponieważ nie wszystkie a_i są zerami, więc także suma $f_1 + \ldots + f_n$ jest (w swojej dziedzinie) funkcją ściśle malejącą i może mieć co najwyżej jedno miejsce zerowe. Równanie $(*)$ ma zatem – oprócz pierwiastka $x_0 = 0$ – jeszcze co najwyżej jeden pierwiastek rzeczywisty.

476. Prowadzimy dowód, przyjmując jako milczące założenie, że zbiory A_i są różne (żadne dwa nie są identyczne).

Zbiór A_1 ma wspólny element (elementy) z każdym innym zbiorem A_i; istnieje więc element $a \in A_1$ należący do nieskończenie wielu zbiorów A_i. Jeśli a należy do wszystkich A_i, to mamy tezę (b i c mogą być wtedy wybrane dowolnie).

Załóżmy więc, że a nie należy do pewnego zbioru A_k. Zbiór ten przecina wszystkie inne A_i, wobec czego pewien element $b \in A_k$ należy do nieskończenie wielu spośród tych zbiorów A_i, które zawierają element a (oczywiście $b \neq a$, skoro $a \notin A_k$). Jeżeli wszystkie zbiory A_i zawierają któryś z elementów a, b, to koniec dowodu (c można wybrać dowolnie).

Przyjmijmy w takim razie, że istnieje zbiór A_ℓ, nie zawierający a ani b. Jak poprzednio, pewien element $c \in A_\ell$ należy do nieskończenie wielu zbiorów A_i – takich, które już zawierają a oraz b (i znów: $c \neq a$, $c \neq b$, bo $a, b \notin A_\ell$).

Trójka $\{a, b, c\}$ jest wówczas tą, o którą chodzi w zadaniu. Gdyby bowiem istniał zbiór A_m, nie zawierający żadnego z elementów a, b, c, to pewien element $d \in A_m$ musiałby należeć do nieskończenie wielu spośród tych zbiorów A_i, które już zawierają całą trójkę $\{a, b, c\}$ ($d \neq a, b, c$). Zatem mielibyśmy nieskończenie wiele zbiorów A_i, identycznych ze zbiorem $\{a, b, c, d\}$, wbrew przyjętej interpretacji treści zadania.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2004

UWAGA!
ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
366 ($WT = 1{,}05$) i **367** ($WT = 3{,}25$)
z numeru 11/2003

Zbigniew Galias	– Kraków	42,38
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	22,14
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	18,00
Tomasz Wietecha	– Tarnów	16,08
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	15,15

Zadania z fizyki nr 380, 381

Redaguje Jerzy B. BROJAN

380. Dwie kulki upuszczono w odstępie czasu t z tej samej wysokości h. Kulki poruszają się wzdłuż prostej pionowej i zderzają się doskonale sprężyście, a dolna odbija się doskonale sprężyście od podłoża. Jeśli masa dolnej kulki wynosi 1, górnej – 0,7, a ich promienie są znacznie mniejsze od h, to jak wybrać t, aby górna kulka wzniosła się jak najwyżej

a) po pierwszym zderzeniu z dolną kulką?

b) po drugim zderzeniu z dolną kulką?

c) po trzecim zderzeniu z dolną kulką?

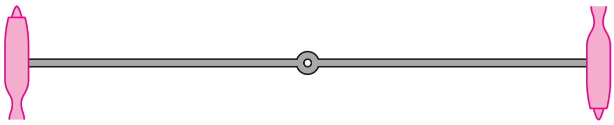
Jaką maksymalną wysokość może osiągnąć górna kulka po dowolnej liczbie zderzeń? Odpowiedzi mogą opierać się na eksperymentach komputerowych (dotyczy to zwłaszcza ostatnich dwóch pytań).

381. Okres połowicznego rozpadu izotopu potasu ^{40}K wynosi $1{,}26 \cdot 10^9$ lat, przy czym z prawdopodobieństwem 11% następuje wychwyt elektronu i przemiana w ^{40}Ar. Zakładając, że w okresie powstawania Ziemi temperatura była tak wysoka, że gazy szlachetne „wyparowały” (uciekły w przestrzeń kosmiczną) i wiedząc, że obecnie stosunek liczby atomów ^{40}Ar na Ziemi do liczby atomów ^{40}K wynosi 0,9, ocenić wiek Ziemi.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2004

Przypominamy treść zadań:

372. Wirnik pewnego silnika jest napędzany silnikami odrzutowymi umieszczonymi na końcach prętów promieniowych („szprych”), wzdłuż których biegną przewody doprowadzające paliwo poprzez oś wirnika.



Ktoś twierdzi, że moc zespołu (odprowadzana w osi, tzn. wirnik obraca jakieś urządzenie) jest proporcjonalna do prędkości kątowej wirnika ω, gdyż obliczamy ją mnożąc siłę odrzutu (zależną tylko od tempa zużycia paliwa i prędkości wylotu gazów, ale nie od ω) przez prędkość silników. Zatem dla dowolnie dużych ω otrzymalibyśmy dowolnie dużą moc, co wobec ustalonego tempa zużycia paliwa wydaje się sprzeczne z zasadą zachowania energii. Wskazać błąd w tym rozumowaniu i obliczyć maksymalną moc zespołu.

Dane: długość szprych $r = 5$ m, tempo zużycia paliwa przez silniki $\psi = 0{,}5$ kg/s, stosunek masy wyrzucanych gazów do masy paliwa $k = 5$ (pozostała masa to pobierane powietrze), prędkość wylotowa gazów względem silnika $v = 1600$ m/s.

Przy jakiej prędkości kątowej wirnika ω osiągana jest maksymalna moc?

373. Po przejściu przez pewien filtr światło białe uzyskuje barwę zieloną. Gdy jednak przepuścić światło białe kolejno przez dużą liczbę takich filtrów, przechodzące światło okazuje się czerwone (jego natężenie jest wtedy bardzo małe). Jak to możliwe?

372. Błąd polega na tym, że pominięta została energia, jaką trzeba zużyć, aby nadać paliwu oraz powietrzu wchodzącemu do silnika prędkość równą prędkości silnika. Na paliwo płynące wzdłuż szprych działa siła Coriolisa, która hamuje obrót wirnika, a jej pokonanie pochłania część mocy silników. Podobna siła hamująca działa na wlot powietrza w silniku.

Aby obliczyć moc maksymalną, rozważmy najpierw silniki unieruchomione ($\omega = 0$). Wtedy energia pochodząca ze spalania paliwa przechodzi w energię kinetyczną wyrzucanych gazów, a na jednostkę czasu energia ta jest dana wzorem

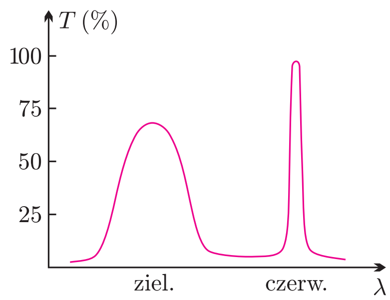
$$P = \frac{1}{2} k \psi v^2.$$

Gdy silniki się poruszają, część tej energii jest odprowadzana jako moc mechaniczna zespołu, a pozostała część przechodzi w energię kinetyczną gazów. Oczywiste jest, że maksymalna moc jest dana właśnie powyższym wyrażeniem, a osiągana jest wtedy, gdy gazy wylotowe są nieruchome względem ziemi ($\omega = v/r$). Ten sam wynik otrzymamy, rozpatrując siły działające na wirnik (siłę odrzutu, siłę związaną z pobieraniem powietrza i siłę Coriolisa). Rachunki liczbowe dają wyniki

$$\omega = 320 \text{ rad/s},$$

$$P = 3{,}2 \text{ MW}.$$

373. Przyjmijmy, że zależność współczynnika transmisji filtru od długości fali jest opisana wykresem podanym na rysunku.



Ponieważ „okno” w zakresie czerwieni jest bardzo wąskie, więc udział czerwieni w świetle przechodzącym jest mały i przeważa zieleń. Zauważmy jednak, że w tym wąskim zakresie światło czerwone przechodzi przez filtr prawie w całości, a więc złożenie większej liczby filtrów nie zmieni natężenia tej składowej. Światło zielone jest natomiast w znaczącej części pochłaniane i każdy kolejny filtr zmniejsza jego natężenie. Przy odpowiednio dużej liczbie filtrów czerwień zacznie przeważać.