# Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2006

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
**505** ($WT = 1{,}65$) i **506** ($WT = 4{,}00$)
z numeru 9/2005

| | | |
|---|---|---|
| Paweł Najman | – Jaworzno | 39,93 |
| Janusz Olszewski | – Suwałki | 36,01 |
| Adam Dzedzej | – Gdańsk | 33,36 |

## Zadania z matematyki nr 521, 522

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**521**. Dwaj gracze na przemian piszą na tablicy liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, N\}$ ($N$ jest zadaną liczbą naturalną); zabronione jest napisanie liczby będącej dzielnikiem liczby już znajdującej się na tablicy. Gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa. Który z graczy (rozpoczynający czy jego przeciwnik) ma strategię zwycięską?

**522**. Wyznaczyć wszystkie piątki liczb pierwszych $a, b, c, d, p$, spełniające równanie
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{d}\right)^2 = p.$$

Zadanie 522 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2006

Przypominamy treść zadań:

**513**. Ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o wyrazach $a_i \in \{1, 2, \ldots, 44\}$ ma następującą własność: pomiędzy każdymi dwoma wyrazami o jednakowej wartości znajduje się co najmniej jeden wyraz większy od nich. Znaleźć największą możliwą długość $n$ takiego ciągu.

**514**. Wyznaczyć wszystkie pary funkcji ciągłych $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie $f(x)g(x) + f(y)g(y) = xf(x) + yg(y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.

**513**. Oznaczmy przez $\ell_m$ maksymalną długość ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o podanej własności, o wyrazach w zbiorze $\{1, 2, \ldots, m\}$. Ustalmy $m > 1$ i weźmy jeden z takich ciągów ($a_i \leqslant m$). Ma on dokładnie jeden wyraz największy – niech to będzie wyraz $a_k$.

Każdy z ciągów $(a_1, \ldots, a_{k-1})$ oraz $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ też ma badaną własność, a ich wyrazy leżą w zbiorze $\{1, \ldots, m-1\}$, więc ich długości nie przekraczają $\ell_{m-1}$ (stwierdzenie słuszne także w przypadku, gdy jeden z nich jest pusty, czyli ma długość zerową). Otrzymujemy zależność rekurencyjną
$$\ell_m \leqslant 1 + 2\ell_{m-1}.$$
Ponieważ $\ell_1 = 1$, wynika stąd, że $\ell_m \leqslant 2^m - 1$.

Długość $n = 2^m - 1$ jest przy tym możliwa do uzyskania: wystarczy wziąć ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ o wyrazach
$$a_i = \alpha + 1 \quad \text{dla} \quad i = 2^\alpha(2\beta + 1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$
(Ilustracja dla $m = 3$: ciąg $(1, 2, 1, 3, 1, 2, 1)$.)

Wniosek:
$$\ell_m = 2^m - 1.$$
Dla $m = 44$ dostajemy w wyniku $2^{44} - 1$.

**514**. Niech $f$ i $g$ będą funkcjami spełniającymi podane równanie. Podstawiając $y = 0$, a następnie $x = 0$, stwierdzamy, że każda z funkcji $\varphi(x) = f(x)g(x) - xf(x)$ oraz $\psi(y) = f(y)g(y) - yg(y)$ ma stałą wartość $-f(0)g(0)$; a ponieważ $\varphi(0) = f(0)g(0)$, ta wartość jest równa 0. Zatem $\varphi \equiv \psi \equiv 0$, czyli
$$f(x)g(x) = xf(x) \quad \text{oraz} \quad f(x)g(x) = xg(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$
Stąd $f(x) = g(x)$ dla $x \neq 0$; wobec ciągłości także $f(0) = g(0)$. Tak więc $f$ i $g$ to ta sama funkcja; zadane równanie przybiera postać
$$f(x)\bigl(f(x) - x\bigr) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$
To znaczy, że dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ wartość $f(x)$ jest równa $x$ lub 0. W każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$ funkcja ciągła $h(x) = f(x)/x$, przyjmująca co najwyżej dwie wartości (0 lub 1), musi być stała. Otrzymujemy w ten sposób cztery możliwe funkcje $f$:
$$f_1(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}; \qquad f_2(x) = x \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R};$$
$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x & \text{dla } x \geqslant 0; \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x \geqslant 0; \end{cases}$$
każda z nich (wraz z równą jej funkcją $g$) spełnia wyjściowe równanie.

# Klub 44

## Zadania z fizyki nr 418, 419

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

**418**. Przez miedziany przewód o promieniu przekroju $r$ płynie prąd elektryczny, powodując jego nagrzewanie się. Pewien odcinek tego przewodu jest otoczony cienką warstwą izolacji o współczynniku przewodnictwa cieplnego $\lambda$. Dany jest też współczynnik przenoszenia ciepła z powierzchni do otaczającego powietrza, równy $\kappa$. Jaki warunek muszą spełniać te parametry, aby temperatura drutu w przewodzie izolowanym była niższa, niż w nieizolowanym?

Wskazówki:
a) Przepływ ciepła $Q$ między dwiema płaskimi powierzchniami $S$ odległymi od siebie o $h$, których temperatury wynoszą $T_1$ i $T_2$, jest dany wzorem

$$\frac{Q}{S\mathrm{d}t} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{h},$$

gdzie $\mathrm{d}t$ – przedział czasu, a $\lambda$ – współczynnik przewodnictwa cieplnego. Dla miedzi ten współczynnik jest tak duży, że jej temperaturę można uznać za stałą na danym przekroju przewodu.
b) Odpływ ciepła od powierzchni $S$ o temperaturze $T_2$ do otaczającego powietrza o temperaturze $T_3$ jest dany przybliżonym wzorem

$$\frac{Q}{S\mathrm{d}t} = \kappa(T_2 - T_3),$$

gdzie $\kappa$ jest tzw. współczynnikiem przenoszenia ciepła (uwzględniającym konwekcję i promieniowanie).

**419**. Oczy człowieka są na wysokości 1,7 m nad płaską, poziomą powierzchnią ziemi (np. pasem startowym na lotnisku), a temperatura na wysokości oczu jest o 3° C niższa, niż przy ziemi. W jakim zakresie odległości człowiek może widzieć powierzchnię ziemi? Wystarczy ocena przybliżona.

Dany jest bezwzględny współczynnik załamania powietrza w normalnych warunkach, równy 1,00029. Należy przyjąć, że różnica między tym współczynnikiem a jednością jest proporcjonalna do gęstości powietrza, a zależność temperatury od wysokości jest liniowa.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2006

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
**406** ($WT = 2{,}84$) i **407** ($WT = 3{,}06$)
z numeru 11/2005

| | | |
|---|---|---|
| Zbigniew Galias | – Kraków | 45,44 |
| Mateusz Łącki | – Kraków | 39,37 |
| Konrad Kapcia | – Częstochowa | 27,70 |
| Andrzej Idzik | – Bolesławiec | 26,43 |
| Tomasz Tkocz | – Rybnik | 20,08 |
| Jacek Konieczny | – Poznań | 15,22 |

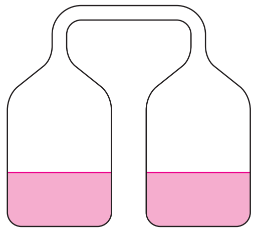
Gdyby p. Galiasowi odrobinę bardziej się spieszyło, bez kłopotu mógłby zostać członkiem Klubu 44F już bardzo dawno temu – stan 30 punktów na koncie osiągnął przecież po 48 zadaniach, czyli w 1987 roku! No cóż, cieszymy się, że mamy tak wiernego czytelnika, nawet jeśli rozwiązania przysyła rzadko...

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2006

Przypominamy treść zadań:

**410**. Ocenić orientacyjnie stosunek masy niezbędnego paliwa do masy statku kosmicznego wprowadzonego na niską ($h_o = 500$ km) orbitę okołoziemską. Dane: prędkość wylotowa gazów względem rakiety $v_g = 3$ km/s, stosunek siły ciągu silników do ciężaru startowego $n = 1{,}75$. Dla uproszczenia pominąć opór powietrza podczas startu i korzyści wynikające z zastosowania rakiety kilkustopniowej. Jak dużą oszczędność paliwa daje wystrzelenie statku kosmicznego z kosmodromu na równiku w porównaniu z kosmodromem na biegunie (gdyby istniał tam kosmodrom)?

**411**. W jednym naczyniu znajduje się czysta woda, a w drugim identycznym naczyniu – roztwór soli w wodzie. Naczynia połączono rurką (rys.) i pozostawiono na bardzo długi czas. Czy poziom wody w naczyniach pozostanie stały, a jeśli nie, to jak się będzie zmieniał? Jak zależy przebieg zjawiska od tego, czy w naczyniach znajduje się powietrze?



**410**. Autor założył następujący skrajnie uproszczony schemat lotu rakiety: najpierw pionowe rozpędzanie się do wyczerpania paliwa, następnie bezwładne wznoszenie się do wysokości $h_o$, wreszcie nagła zmiana kierunku na poziomy bez utraty prędkości (odbicie sprężyste od sztywnej przeszkody ustawionej ukośnie??). Całkując równanie ruchu rakiety o zmiennej masie, przy założeniu stałego tempa zużycia paliwa i stałej wartości siły ciężkości (do obliczeń podstawimy wartość g na wysokości 250 km, tzn. 9,1 m/s$^2$), otrzymuje się następujące wyrażenia na zależność prędkości rakiety $v$ i jej wysokości $h$ od czasu:

$$v = v_\mathrm{g} \ln \frac{v_\mathrm{g}}{v_\mathrm{g} - \mathrm{g}nt} - \mathrm{g}t,$$

$$h = v_\mathrm{g}t - \frac{v_\mathrm{g}}{\mathrm{g}n}(v_\mathrm{g} - \mathrm{g}nt) \ln \frac{v_\mathrm{g}}{v_\mathrm{g} - \mathrm{g}nt} - \frac{\mathrm{g}t^2}{2}.$$

Nietrudno zauważyć, że argument logarytmu w powyższych wyrażeniach jest równy stosunkowi masy początkowej do aktualnej. Rozważmy chwilę zakończenia pracy silników i podstawmy pewną wybraną wartość $k$ tego stosunku. Procedura numeryczna może być skonstruowana następująco: po zadaniu $k$ obliczamy stąd $t$, $v$ i $h$, a następnie z zasady zachowania energii wyznaczamy prędkość na zadanej wysokości $h_o$. Następnie korygujemy $k$ tak, aby ta prędkość stała się równa prędkości orbitalnej (na wysokości 500 km jest ona równa 7,6 km/s). Otrzymana wartość $k$ wynosi 23, czyli szukany stosunek masy paliwa do masy statku byłby równy 22. W rzeczywistości wynosi on około 45 – może ktoś z Czytelników zastosuje inny schemat obliczeniowy i otrzyma lepszy wynik?

W przypadku kosmodromu na równiku do prędkości uzyskanej dzięki pracy silników dodaje się prędkość obiegowa powierzchni Ziemi, równa 40 000 km/24 h = 0,46 km/s. Obliczenia wykonane według powyższej zasady wskazują, że stosunek masy paliwa do masy statku zmniejszy się z 22 do 19, czyli o 14%.

**411**. Ciśnienie pary nasyconej nad roztworem jest niższe, niż nad czystą cieczą. Dlatego para wodna będzie przepływać znad czystej wody do naczynia z roztworem i tam się skraplać, aż ciśnienie słupa pary zrównoważy wspomnianą różnicę ciśnień. Innym czynnikiem sprzyjającym ustaleniu się nowego położenia równowagi jest fakt, że stężenie roztworu będzie malało, a wtedy ciśnienie pary nad nim zbliża się do ciśnienia nad czystą wodą. W obecności powietrza przepływ pary wodnej będzie następował wskutek dyfuzji, co oznacza wolniejszy przebieg zjawiska.