Lepsze ułamki

Rozwiązanie zadania M 1140. Wybierzmy dowolną osobę A oraz rozpatrzmy zbiór $\mathcal{Z}_A$ tych wszystkich osób, które znają osobę A. Jeśli wszystkie osoby ze zbioru $\mathcal{Z}_A$ znają się, to wybieramy dowolne trzy osoby B, C, D z tego zbioru. Wtedy każde dwie osoby ze zbioru $\{A, B, C, D\}$ znają się, a zatem możemy je posadzić przy okrągłym stole zgodnie z warunkami zadania.

Załóżmy więc, że w zbiorze $\mathcal{Z}_A$ istnieją dwie osoby B i C, które się nie znają. Osoba B zna osobę A, nie zna osoby C, a zatem wśród pozostałych 17 osób musi ona mieć co najmniej dziewięciu znajomych. Również osoba C wśród tych samych 17 osób ma co najmniej dziewięciu znajomych. Stąd wynika, że w tej grupie 17 osób istnieje osoba D, która zna zarówno B, jak i C. Wystarczy teraz posadzić osoby A, B, C, D przy okrągłym stole w tej właśnie kolejności.

Gdy wystartujemy do ułamka $\frac{1517}{1073}$ ze sposobem na skracanie opartym o wcześniejsze rozłożenie licznika i mianownika na czynniki pierwsze, długo będziemy szukali tego rozkładu. Podobnie będzie z ułamkiem $\frac{771}{146}$.

Oto niezawodna metoda, która – przy okazji – pokazuje jeszcze jedną postać, jaką można nadawać ułamkom. Przepis jest prosty: wyłącz całości, to, co ci zostało, odwróć do góry nogami, znów wyłącz całości, znów odwróć do góry nogami i dalej powtarzaj to (być może bez końca). Spróbujmy.

$$\frac{1571}{1073} = 1 + \frac{444}{1073} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{185}{444}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{74}{185}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{37}{74}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}.$$

Otrzymaliśmy inną, bardziej fantazyjną postać ułamka: ułamek łańcuchowy. Gdy nie mamy ochoty na takie, zużywające wiele papieru, graficzne figle, zapisujemy to tak: $(1; 2, 2, 2, 2)$, ale tymczasem spróbujmy przekształcać ten ułamek z prawej na lewo:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{12}{5}}} = 1 + \frac{1}{\frac{29}{12}} = \frac{41}{29}.$$

Jak widać, wykonując tę operację tam i z powrotem, skróciliśmy ułamek: to, przez co skrócił się ostatni ułamek przy rozwijaniu w ułamek łańcuchowy (czyli 37), to właśnie największy wspólny dzielnik liczb 1517 i 1073. Nie będziemy dowodzili, że tak będzie się działo zawsze (pierwszy dostrzegł to Teajtetos z Aten w czasach Peryklesa, czyli 2400 lat temu). Sprawdzimy tylko, co ta metoda przyniesie w przypadku drugiego z ułamków wymienionych na początku. Nie będziemy tu wypisywali kolejnych postaci pojawiających się przy rozwijaniu tego ułamka w ułamek łańcuchowy, lecz tylko kolejno pojawiające się wyniki, powstające przy odwracaniu poprzednio otrzymanych ułamków właściwych:

$$\frac{771}{146} = 5 + \frac{41}{146}; \quad 3 + \frac{23}{41}; \quad 1 + \frac{18}{23}; \quad 1 + \frac{5}{18}; \quad 3 + \frac{3}{5}; \quad 1 + \frac{2}{3}; \quad 1 + \frac{1}{2}.$$

Otrzymaliśmy zatem ułamek łańcuchowy $(5; 3, 1, 1, 3, 1, 1, 2)$, który każdy chętny może sobie zapisać w rozwiniętej formie (gdy tylko ma dużo wolnego miejsca). Ale do rzeczy – rozwijany ułamek okazał się nieskracalny – żaden z wypisanych przed chwilą ułamków nie skracał się.

Obserwując choćby te dwa obliczenia, łatwo wywnioskować, że każda liczba wymierna rozwija się w skończony ułamek łańcuchowy (o ileż to piękniej, niż z młodszymi o tysiąclecie ułamkami dziesiętnymi). Ale w ułamki łańcuchowe można rozwijać też i inne liczby. Co więcej – robi się to w ten sam sposób. Oto przykład:

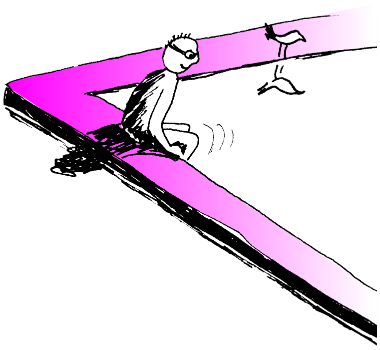
$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) =$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = \ldots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ldots}}}}$$

(mam nadzieję, że każdy wie, iż $(\sqrt{2} - 1)$ i $(\sqrt{2} + 1)$ to wzajemne odwrotności). A to, co po wielokropku, wynika z faktu, że gdy w obliczeniach pojawi się po raz drugi ta sama liczba (u nas była to liczba $(\sqrt{2} - 1)$), dalsze obliczenia będą się powtarzały. Otrzymaliśmy ułamek łańcuchowy okresowy z powtarzającą się stale dwójką, co się zapisuje $(1; \overline{2})$. Podobny przykład jest rozpatrywany w zadaniu o opornikach (w Małej Delcie). Bez oporników stwierdzamy (stosując tę samą metodę, co poprzednio), że

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0 + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \ldots = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots}}}},$$

czyli $(0; \overline{1})$.



Dla dociekliwych: wyrażenie

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ldots}}}$$

oznacza granicę ciągu

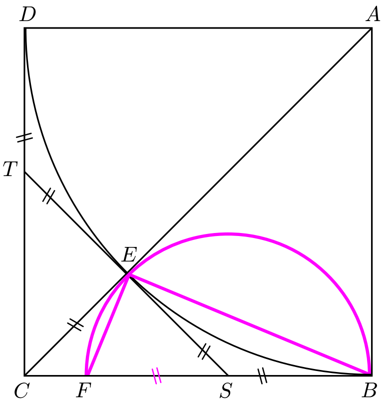
$$1, \ 1 + \frac{1}{2}, \ 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \ 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \ldots$$

Ułamki łańcuchowe okresowe to rozwinięcia niewymiernych pierwiastków równań kwadratowych o współczynnikach całkowitych. Znów nie będziemy tego dowodzili, tylko obejrzymy przykład tego, jak to się dzieje. Może to być ostatni z rozpatrywanych przykładów (jeśli jakieś obliczenie można wykonać na kilka sposobów, to staje się ono bardziej poprawne – prawda?). Zauważmy, że

$$\text{gdy} \quad x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}, \quad \text{to} \quad x=\frac{1}{1+x}.$$

Zatem $x(1+x)=1$, czyli $x^2+x-1=0$, skąd mamy (wobec dodatniości poszukiwanego pierwiastka) $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

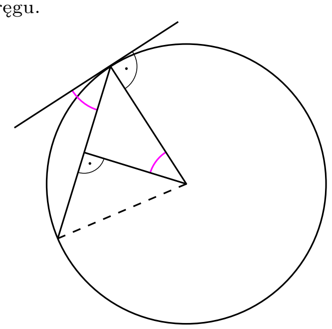
Metoda rozwijania w ułamek łańcuchowy stosuje się nie tylko do liczb. Oto przykład geometrycznego (!) obliczenia stosunku przekątnej kwadratu do jego boku. W kwadracie $ABCD$ rysujemy ćwiartkę okręgu o środku A i promieniu AB. Przecina ona przekątną AC w punkcie E. Przed dalszym rysowaniem trzeba zauważyć, że $BS=SE=ET=TD=EC$ (bo styczne z jednego punktu do okręgu są jednakowej długości, rysunek jest – jak dotąd – symetryczny, a SCT to połówka kwadratu, oczywiście mniejszego). Teraz rysujemy półokrąg o środku S i promieniu SB. Wobec poprzedniego spostrzeżenia przechodzi on przez E. Oznaczmy drugi koniec jego średnicy przez F. Teraz liczymy jak poprzednio (wyłączanie całości i odwracanie)



$$\frac{AC}{AB}=1+\frac{CE}{CB}=1+\frac{1}{2+\frac{CF}{CE}}=1+\frac{1}{2+\frac{CE}{CB}}=(1;\overline{2})=\sqrt{2}.$$

Trzecia z równości bierze się z podobieństwa trójkątów CBE i CEF: mają kąt przy wierzchołku C wspólny, a ponadto kąt CBE, czyli FBE (jako wpisany w mniejszy okrąg), jest równy kątowi FEC (jako dopisanemu opartemu na tym samym łuku – dla nieznających tego pojęcia objaśnienie na marginesie). A ponieważ stosunek CE do CB się powtarza...

Kąt dopisany to kąt między styczną do okręgu a jego cięciwą poprowadzoną z punktu styczności. Mówimy, że jest oparty na zawartym w jego wnętrzu łuku okręgu.



Wobec tego jest równy, jak widać na rysunku, połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku (kąty o ramionach odpowiednio prostopadłych), a tym samym jest równy każdemu z kątów wpisanych w okrąg i opartych na tym samym łuku.

Najważniejszą bodaj własność ułamków łańcuchowych odkrył Lagrange. Okazuje się, że redukt ułamka łańcuchowego jest najlepszym przybliżeniem wymiernym rozwijanej liczby. Oto objaśnienia użytych terminów. Redukt ułamka łańcuchowego to on sam obcięty do jakiejś długości – np. $\frac{41}{29}$ jest reduktem $\sqrt{2}$ – prawda? Najlepsze przybliżenie wymierne jakiejś liczby to takie przybliżenie, że lepsze od niego musi mieć większy mianownik. Zatem z podanego przed chwilą przykładu wynika, że lepsze przybliżenie wymierne $\sqrt{2}$ niż $\frac{41}{29}$ musi mieć mianownik co najmniej 30. A lepsze od $\frac{7}{5}$ musi mieć mianownik większy od 5 – prawda?

Na koniec jeszcze zwróćmy uwagę, że w zapisie ułamka łańcuchowego oddziela się poszczególne pozycje przecinkami. Czy można byłoby tego nie robić (tak, jak nie robimy tego zapisując ułamki dziesiętne)? Otóż nie. Na poszczególnych miejscach mogą się bowiem pojawiać dowolnie duże liczby. Np. $(1;1000,333)$ to łańcuchowy zapis liczby

$$1+\frac{1}{1000+\frac{1}{333}}=1+\frac{333}{333001}=\frac{333334}{333001},$$

której nie ma powodu dyskryminować. Przy tej okazji można przedstawić jeden z nierozwiązanych dotąd problemów: czy w rozwinięciu łańcuchowym liczby $\sqrt[3]{2}$ występuje tylko skończona liczba różnych wyrazów?

I jeszcze uwaga natury filozoficzno-historycznej. Dlaczegóż to nie jesteśmy przyzwyczajeni do ułamków łańcuchowych, dlaczego nie ma ich w szkole? Bo prawie wcale ich nie używamy. A dlaczego ich nie używamy? Można spekulować na ten temat, sugerując, że np. dodawanie ułamków łańcuchowych czy ich mnożenie to byłby koszmar – ale może dobrych sposobów nie ma, bo ich dostatecznie intensywnie nie szukaliśmy? Wydaje się, że jedyna nauka płynąca z takich rozważań to dostrzeżenie, że kształt uprawianej matematyki nie jest jedyny możliwy, że mogło wszystko ułożyć się inaczej.

Marek KORDOS