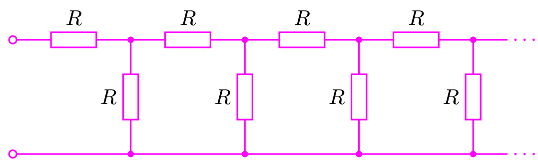
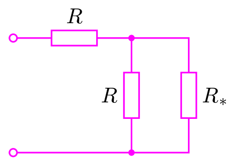
Teoria liczb a opór zastępczy

W *Delcie* 2/2003 opisałam metodę obliczania oporu zastępczego nieskończonych układów elektrycznych. Metodę tę można zastosować do następującego układu.

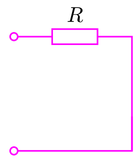


Ponieważ układ ten jest nieskończony, więc opór samopodobnej części układu bez pierwszych dwóch oporników jest równy oporowi R_* całego układu

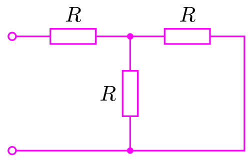


Czyli $R_* = \dfrac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R_*}}$ i stąd $R_* = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Problem ten można rozwiązać też inną metodą.

Układ z jednym opornikiem



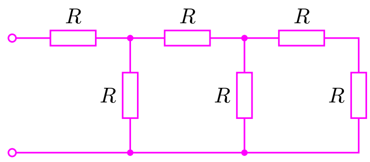
ma opór zastępczy $R_1 = R$. Po dodaniu pierwszego oczka sieci



opór zastępczy całości wynosi

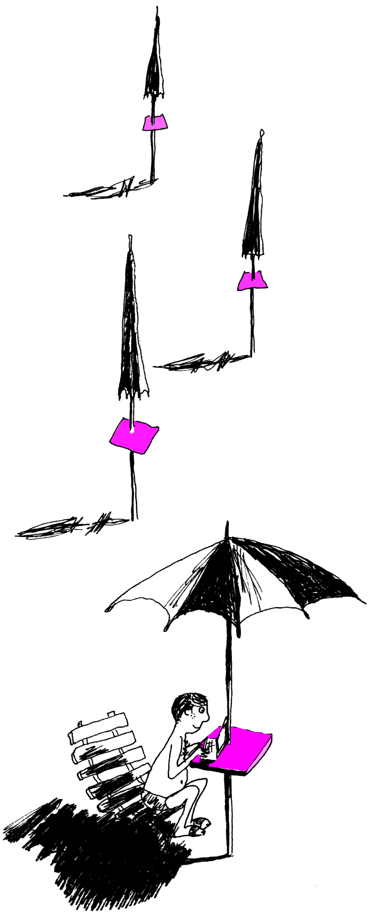
$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}R.$$

Po dodaniu jeszcze kolejnego



mamy

$$R_3 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R_2}} = \frac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}R.$$



Dodając w ten sposób kolejne oporniki, otrzymujemy następujące wyrażenie na opór nieskończonej sieci oporników z rysunku 1

$$R_\infty \equiv R_* = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}R.$$

Patrz artykuł na str. 10–11.

Wyrażenie $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}$ nazywa się ułamkiem łańcuchowym.
Z porównania ze wzorem na opór zastępczy wyprowadzonym na początku wynika, że powinno ono być równe $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Zobaczmy to inaczej.

Mamy

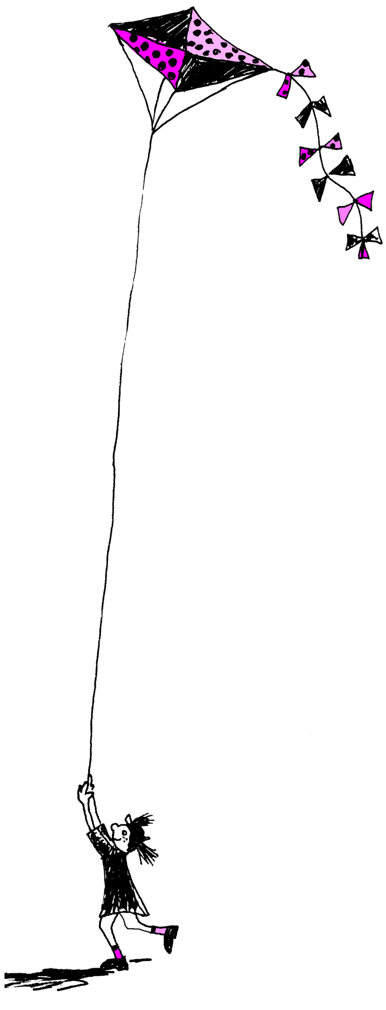
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

Z drugiej strony

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

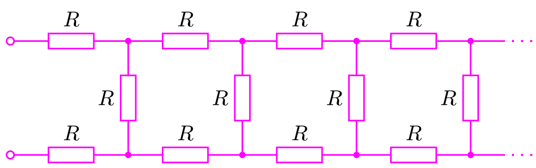
Wstawiając powyższą zależność do przedostatniej i powtarzając to, otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}.$$



Liczba $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *znana jest w matematyce jako tzw. liczba* φ*. Opisuje ona „złoty podział”, czyli taki podział odcinka na dwie części, że część dłuższa ma się tak do krótszej, jak długość całego odcinka do jego dłuższej części. Stosunek długości części dłuższej do krótszej, zwany „boską proporcją”, jest równy* φ *właśnie.*

W podobny sposób można obliczyć opór zastępczy poniższego układu.



Postępujemy tak jak w poprzednim przykładzie, czyli dodajemy do układu kolejne oczka sieci i obliczamy za każdym razem opór zastępczy całości, otrzymując

$$R_\infty = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}}R.$$

W analogiczny do opisanego sposób można pokazać, że ten ułamek łańcuchowy jest równy $\sqrt{3}-1$. Przyjemność tę zostawiam Czytelnikowi.

Małą Deltę przygotowała Ewa CZUCHRY