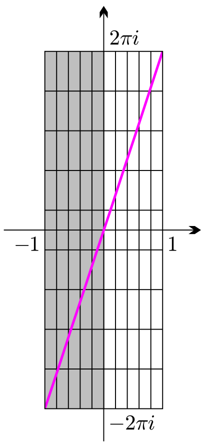
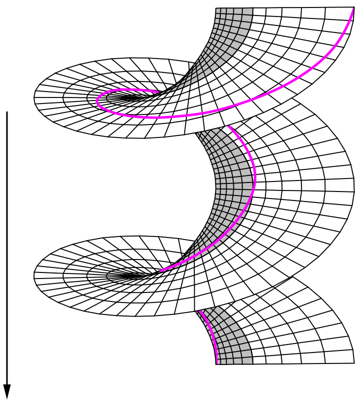
Pięć w jednym

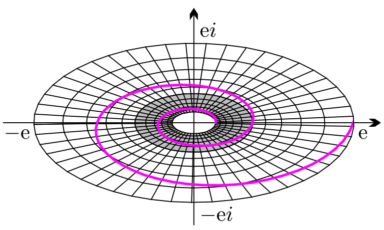
Liczby zespolone, choć od ich odkrycia minęło już kilka wieków, wciąż robią niezłą karierę w wielu dziedzinach matematyki. Ich główną zaletą jest dostarczanie szerszego spojrzenia na badane zagadnienie. Wystarczy choćby wspomnieć Zasadnicze Twierdzenie Algebry, mówiące o tym, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych ma pierwiastek zespolony.



Tak jak liczby rzeczywiste utożsamiamy z prostą z wyróżnionymi punktami 0 i 1, tak liczby zespolone możemy traktować jako punkty płaszczyzny także z wyróżnionymi punktami 0 i 1. Suma punktów A i B jest wyznaczona przez koniec wektora $\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B}$. W celu pomnożenia tych dwóch punktów mierzymy kąty (zwane też argumentami) pomiędzy wektorem $\overrightarrow{01}$, a $\overrightarrow{0A}$ i $\overrightarrow{0B}$. Nazwijmy je odpowiednio α i β. Iloczyn definiujemy jako punkt na półprostej wychodzącej z 0 i tworzącej z wektorem $\overrightarrow{01}$ kąt $\alpha + \beta$ oraz leżący w odległości $|0A| \cdot |0B|$ od 0. Zamiast o punktach możemy myśleć o liczbach zespolonych jako o wektorach zaczepionych w 0. Często stosuje się zamiennie te podejścia. Zauważmy ponadto, że na płaszczyźnie istnieją dokładnie dwa punkty, które w drugiej potędze dają -1. Oba leżą na prostej prostopadłej do $\overrightarrow{01}$ i mają długość 1. Po wybraniu jednego z nich, nazwijmy go i, każdą liczbę zespoloną możemy jednoznacznie przedstawić w postaci $x \cdot \overrightarrow{01} + y \cdot \overrightarrow{0i}$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{R}$ (jest to równoważne z wprowadzeniem prostokątnego układu współrzędnych na płaszczyźnie). Używając takiego zapisu liczb zespolonych, będziemy pomijać $\overrightarrow{01}$ i zamiast $\overrightarrow{0i}$ pisać po prostu i.



Na liczby zespolone możemy rozszerzać w sposób ciągły dobrze znane funkcje rzeczywiste. Najprościej jest z wielomianami, ponieważ do obliczenia wartości takiej funkcji w danym punkcie wystarczy wykonać skończenie wiele dodawań i mnożeń, a te już umiemy wykonać. A co z funkcją e^x? Przypomnijmy najpierw, jak ją definiujemy dla liczb rzeczywistych. Jedna z możliwych definicji jest taka: przez e^x oznaczamy granicę ciągu $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$. Naturalnym pomysłem jest więc spróbowanie określenia e^z jako $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{z}{n})^n$. Granicę ciągu liczb zespolonych definiujemy podobnie jak dla ciągów liczb rzeczywistych – wartość bezwzględną zastępujemy odległością punktów na płaszczyźnie. Okazuje się, że tak otrzymana funkcja jest całkiem porządna. Oprócz ciągłości, zachowała też własność funkcji wykładniczych: $\mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$.



Z podanej definicji nie widać, co tak naprawdę e^z robi z wektorami. Aby się tego dowiedzieć, wystarczy umiejętność obliczania granic ciągów o wyrazach rzeczywistych. Zatem do dzieła. Jeżeli $z = x + iy$, to wektor odpowiadający $(1 + \frac{z}{n})$ ma długość $l_n = \sqrt{(1 + \frac{x}{n})^2 + (\frac{y}{n})^2}$, a sinus kąta θ_n pomiędzy $\overrightarrow{01}$, a tym wektorem to $\dfrac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}$. Nietrudnym ćwiczeniem jest wyliczenie $\lim_{n\to+\infty} l_n^n = \mathrm{e}^x$ oraz $\lim_{n\to+\infty} n\theta_n = y$. Oznacza to, że e^{x+iy} jest końcem wektora o długości e^x i argumencie y. W szczególności rozpatrywana funkcja jest okresowa z okresem $2\pi i$ i nigdzie się nie zeruje. Pomóżmy jeszcze wyobraźni i przekonajmy się, co jest obrazem prostych. Proste równoległe do $\overrightarrow{01}$ ($y = \mathrm{const}$) są przekształcane na półproste wychodzące z zera (choć go nie zawierające) pod kątem y do $\overrightarrow{01}$. Proste prostopadłe do $\overrightarrow{01}$ ($x = \mathrm{const}$) „nawijają się" na okręgi o środku w punkcie 0 i promieniu e^x. Pomóc może także spojrzenie na rysunek na marginesie, obrazujący funkcję e^z na fragmencie płaszczyzny.

Na deser, obliczmy, ile wynosi $\mathrm{e}^{i\pi}$. Liczba ta odpowiada wektorowi długości e^0, który tworzy z $\overrightarrow{01}$ kąt π. Zatem jest to liczba rzeczywista równa -1. Rezultat ten przeważnie zapisuje się w trochę innej postaci, a otrzymaną równość nazywa się tożsamością Eulera:

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0.$$

Wzór ten, wiążący w nieoczekiwany sposób pięć stałych matematycznych odkrywanych na przestrzeni wieków, uchodzi za najpiękniejszy wzór matematyki. Tytuł taki przyznali mu w 1988 czytelnicy czasopisma *The Mathematical Intelligencer*. Bez wątpienia, jeszcze przez długi czas będzie on źródłem fascynacji kolejnych pokoleń miłośników matematyki.

Marcin HAUZER