Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
28 II 2007

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
519 ($WT = 1{,}18$) i **520** ($WT = 3{,}49$)
z numeru 4/2006

Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	43,55
Michał Kieza	– Warszawa	40,08
Michał Jastrzębski	– Warszawa	36,28
Jerzy Cisło	– Wrocław	35,81
Łukasz Garncarek	– Opole	33,28
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	32,84
Dariusz Kurpiel	– Posada Zarszyn	32,27

Zadania z matematyki nr 531, 532

Redaguje Marcin E. KUCZMA

531. Rozważamy graf mający n wierzchołków oraz q krawędzi (każda krawędź łączy dwa różne wierzchołki; każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź). Zakładamy, że istnieje co najmniej jeden zamknięty cykl krawędzi długości nieparzystej, ale nie istnieje cykl długości 3. Dowieść, że $4q \leqslant n^2 - 2n + 5$.

532. Ciąg liczb rzeczywistych (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym:

$$a_1 = 1, \qquad a_n = \frac{n+1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i \quad \text{dla } \ n \geqslant 2.$$

Wyprowadzić wzór jawny, wyrażający liczby a_n jako funkcję zmiennej n.

Zadanie 532 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
416 ($WT = 2{,}80$), **417** ($WT = 1{,}30$),
418 ($WT = 1{,}47$) i **419** ($WT = 2{,}80$)
z numerów 4/2006 i 5/2006

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	48,78
Tomasz Tkocz	– Rybnik	32,58
Konrad Kapcia	– Częstochowa	32,13
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	31,21
Jerzy Witkowski	– Radlin	22,65
Tomasz Wietecha	– Tarnów	22,24
Krzysztof Magiera	– Łosiów	16,03
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	13,70

Pan Idzik zakończył właśnie siódme okrążenie! Teraz może się ścigać już tylko z uczestnikami ligi matematycznej, wśród których jest czterech, którzy mogą się poszczycić podobnym (lub nieco lepszym) osiągnięciem. A gdyby dodać punktację fizyczną do matematycznej, to wszystkich wyprzedza Tomasz Wietecha, łącznie 11 razy po 44 punkty!

Zadania z fizyki nr 428, 429

Redaguje Jerzy B. BROJAN

428. Zegar-klepsydra stoi na precyzyjnej wadze, działającej bez żadnej zwłoki. Naszkicować wykres wskazań wagi w zależności od czasu, po obróceniu klepsydry.

429. Cylinder o wysokości $h = 0{,}5\,\mathrm{m}$ i objętości $V = 200\,\mathrm{cm}^3$ jest całkowicie wypełniony wodą, z wyjątkiem przyczepionego do dna pęcherzyka powietrza o objętości $V_0 = 0{,}02\,\mathrm{cm}^3$. Początkowo ciśnienie w górnym końcu cylindra wynosiło $p = 10^5\,\mathrm{Pa}$. Jeśli cylinder jest sztywny (o niezmiennej objętości), a współczynnik ściśliwości wody (zdefiniowany wzorem $\beta = -\frac{\Delta V}{V\Delta p}$) wynosi $\beta = 5\cdot 10^{-10}\,\mathrm{Pa}^{-1}$, to jak zmieni się ciśnienie w cylindrze, gdy pęcherzyk wypłynie na wierzch?

Rozwiązanie zadania F 682.

Zgodnie z warunkami zadania moc wytworzona przez baterię w obu przypadkach jest jednakowa, zatem opory obwodów zewnętrznych muszą być takie same:

$$R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0+R_2}} = R_0, \qquad \text{stąd} \qquad R_2^2 + 2R_1R_2 = R_0^2.$$

Zgodnie z drugim warunkiem spadek napięcia U_1 na oporze R_0 w pierwszym przypadku jest α razy mniejszy od spadku napięcia U_2 na oporze R_0 podczas bezpośredniego włączenia, tj. $U_1 = \frac{U_2}{\alpha}$, inaczej:

$$IR_0 = \alpha R_0 \frac{R_1(R_0+R_2)I}{(R_0+R_1+R_2)(R_0+R_2)},$$

stąd

$$R_0 + R_1 + R_2 = \alpha R_1.$$

Z powyższych dwóch równań otrzymujemy

$$R_1 = \frac{2R_0}{\alpha^2 - 1}, \quad R_2 = R_0\frac{\alpha-1}{\alpha+1}.$$