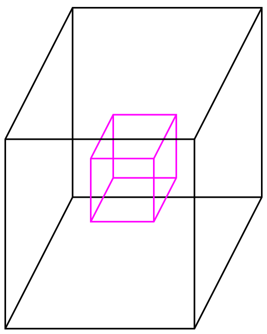
Konkurs – kulki w sześcianie i czworościanie

Dla ułatwienia sobie życia zajmujmy się tylko sześcianem o krawędzi 1. Będziemy w nim umieszczać możliwie duże jednakowe kulki.

Jak duże? Każdy widzi, że zależy to od tego, ile chcemy, aby tych kulek się zmieściło. Oznaczmy największy promień n kulek mieszczących się w sześcianie przez $r(n)$. Bez specjalnego kłopotu stwierdzamy, że gdy chcemy umieścić tylko jedną kulkę, to jej promieniem jest $r(1)=\frac{1}{2}$. A co będzie, gdy zapragniemy, by kulek było więcej? Tu nasuwa się od razu pomysł, który będzie pasował przynajmniej do kilku przypadków. Kulka wrzucona do sześcianu ma środek w ... mniejszym sześcianie. Istotnie: gdy ta kulka ma promień r, jej środek znajduje się w tych punktach wnętrza sześcianu jednostkowego, które są odległe od brzegu tego sześcianu co najmniej o r, a więc we wnętrzu sześcianu o krawędzi $1-2r$.



Środki kulek o promieniu $\frac{1}{3}$ w sześcianie jednostkowym muszą być w sześcianie o krawędzi $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Gdy więc chcemy umieścić w sześcianie możliwie duże dwie kulki, to ich środki należy obrać możliwie jak najdalej od siebie w sześcianie o krawędzi $1-2r(2)$. Najdalsze punkty sześcianu to końce jego przekątnej. Ma ona, oczywiście, długość $\sqrt{3}(1-2r(2))$. Ale kulek nie będzie można powiększyć, gdy będą styczne, czyli gdy będą miały promień równy połowie tej przekątnej. Stąd otrzymujemy równanie

$$\sqrt{3}(1-2r(2))=2r(2),$$

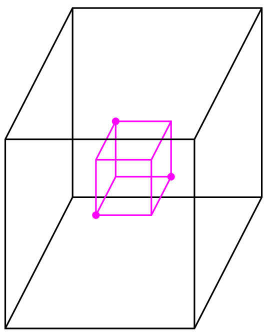
które daje nam rezultat

$$r(2)=\frac{3-\sqrt{3}}{4}\approx 0{,}316.$$

To daje się łatwo powtórzyć dla trzech kulek: mamy

$$\sqrt{2}(1-2r(3))=2r(3),\quad \text{zatem}\quad r(3)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}293,$$

bo trzy najodleglejsze punkty sześcianu to trzy wierzchołki tworzące trójkąt równoboczny o boku będącym przekątną ściany. Od razu też (lub po chwili) spostrzegamy, że jest jeszcze jeden punkt w tej samej odległości od tych trzech, a więc $r(3)=r(4)$.



Środki trzech maksymalnych kulek w sześcianie.

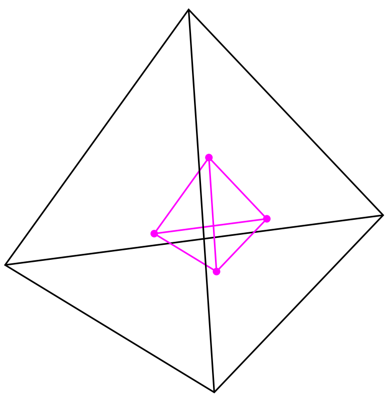
Tu jednak sprawa się zacina. Jak bowiem można dowiedzieć się, gdzie leży pięć punktów sześcianu o boku $1-2r$, takich że najmniejsza odległość między nimi jest możliwie największa? I jaka to jest odległość? To jest właśnie zadanie konkursowe: obliczyć $r(n)$ dla możliwie największej liczby kolejnych n.

Bo, oczywiście, każdy wie, że $r(8)=\frac{1}{4}$, a $r(27)=\frac{1}{6}$, ale co po drodze?

Zadanie wydaje się znacznie trudniejsze, gdy zamiast sześcianu weźmiemy np. czworościan foremny (dla odróżnienia poszukiwany promień oznaczmy teraz $f(n)$). Oczywiście, wiemy (?), że $f(1)=\frac{1}{2\sqrt{6}}$. Co więcej, środek kulki o promieniu r w czworościanie znajduje się zatem w mniejszym czworościanie o krawędzi $1-2\sqrt{6}r$. Ale jak postępować dalej? Znowu są łatwe rezultaty: dla czterech kulek mamy

$$1-2\sqrt{6}f(4)=2f(4),\quad \text{zatem}\quad f(4)=\frac{\sqrt{6}-1}{10}\approx 0{,}145,$$

ale jak obliczyć inne wartości?



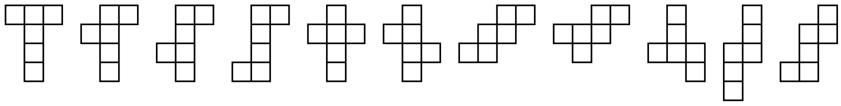
Środki czterech maksymalnych kulek w czworościanie.

A może $f(4)=f(3)=f(2)$?

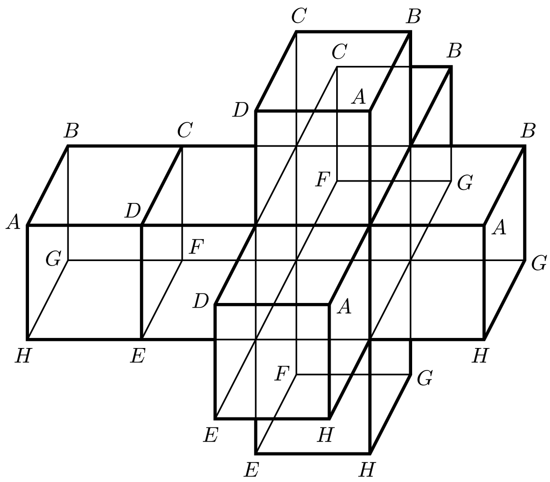
Najlepsze prace opublikujemy.

Konkurs – siatki kostki czterowymiarowej

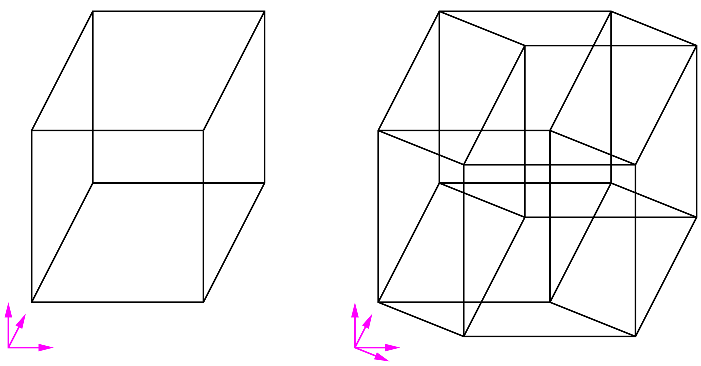
Jednowymiarowa kostka to odcinek, dwuwymiarowa kostka to kwadrat, trójwymiarowa kostka to sześcian. Siatką kostki n-wymiarowej nazywamy takie rozcięcie jej brzegu, aby była ona w jednym kawałku, aby nie rozcinać żadnej z jej $(n-1)$-wymiarowych ścian i aby dawała się umieścić w $(n-1)$-wymiarowej przestrzeni. Po przestudiowaniu tego okropnego określenia stwierdzamy, że jednowymiarowa kostka nie ma siatek, dwuwymiarowa ma jedną (jest nią odcinek, a właściwie „łamana” złożona z czterech przedłużających się odcinków) – zatem nic ciekawego. Ciekawiej przedstawia się sprawa z siatkami sześcianu. Jest ich jedenaście i wszystkie są narysowane poniżej.



Kolejny rysunek przedstawia jedną z siatek kostki czterowymiarowej. Aby ją skleić, należy połączyć wszystkie tak samo nazywające się punkty.



Jasna rzecz, że fizycznie wykonać się tego nie da – nasza przestrzeń (wbrew rozpuszczanym przez niektórych plotkom) jest tylko trójwymiarowa. A co by wyszło, gdybyśmy jednak skleili? Bardzo łatwo się o tym przekonać – wystarczy narysować. Przecież rysujemy na dwuwymiarowym papierze trójwymiarowe kostki, czemu nie moglibyśmy narysować czterowymiarowej? Sześcian rysujemy tak: wyprowadzamy z jednego punktu trzy kreski i umawiamy się, że są one parami prostopadłe i wszystkie tej samej długości, a potem każdą parę uzupełniamy do równoległoboku – zróbmy tak samo w przypadku czterech kresek.



Oto więc czterowymiarowa kostka. Jak widać, ma 16 wierzchołków, 32 krawędzie, 24 płaskie ściany i 8 ścian trójwymiarowych – prawda?

To było łatwe. Trudne natomiast jest pytanie, ile taka kostka ma nieprzystających siatek. Ogłaszamy konkurs na rozwiązanie tego problemu. Najsprytniejszy sposób obliczenia nagrodzimy publikacją.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS