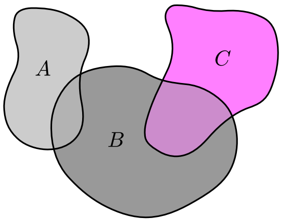
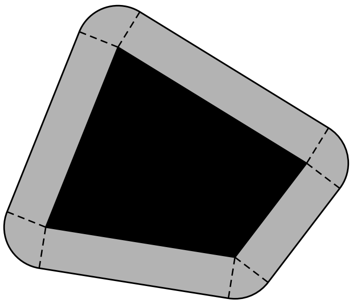
Jak daleko jest od koła do kwadratu?



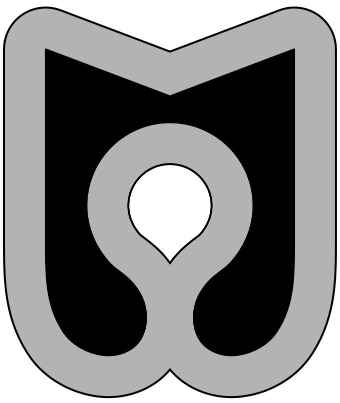
Rys. 1

Chodzi nam tutaj nie o odległości punktów tych figur, lecz o zmierzenie w jakiś sposób, jak bardzo te figury się różnią. W tym celu najpierw spróbujmy określić odległość między konkretnymi figurami. Nasuwającym się sposobem jest stwierdzenie, że odległość dwóch figur to najmniejsza z odległości punktu jednej figury od punktu drugiej. Taki sposób mierzenia ma jednak mało cech, jakie wiążemy ze zwykłą odległością. W szczególności nie jest prawdą, że tak mierzona odległość daje wynik 0 tylko wtedy, gdy figury pokrywają się. Nie jest też spełniona tzw. nierówność trójkąta, czyli że suma odległości A od B i B od C nie może być mniejsza od odległości A od C – każdy łatwo poda taki przykład – dla leniwych: rysunek 1.



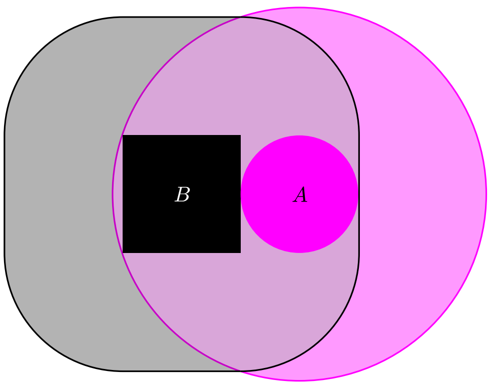
Rys. 2

W jednym ze sposobów wprowadzenia porządnego pojęcia odległości figur posługujemy się pojęciem *otoczki*. Otoczka o szerokości a jakiejś figury to zbiór wszystkich punktów, które są odległe od jakiegoś punktu tej figury nie więcej niż o a. Na rysunku 2 mamy narysowaną otoczkę czworokąta – punkty, o które otoczka jest większa od tego czworokąta, są zacieniowane: jest to suma czterech prostokątów i czterech fragmentów koła, które składają się na jedno koło (oczywiście o promieniu a). Zresztą dla dowolnego n-kąta wypukłego jego otoczka, poza punktami tego wielokąta, zawiera n prostokątów i n fragmentów koła składających się na jedno całe koło. Dla wielokątów niewypukłych i innych figur dodatkowe punkty otoczki trzeba opisywać już w bardziej skomplikowany sposób, choć narysować je łatwo (rys. 3).



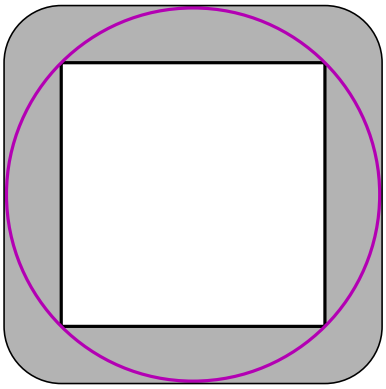
Rys. 3

Za pomocą otoczki odległość figur określa się bardzo prosto. Najpierw znajdujemy najmniejszą szerokość otoczki figury A, która zawiera figurę B – oznaczmy ją r_A. Potem znajdujemy najmniejszą szerokość otoczki figury B, która zawiera figurę A – oznaczmy ją r_B. Odległość figur A i B to większa z tych liczb. Jeżeli średnica koła A i bok kwadratu B na rysunku 4 są równe 2, to – jak łatwo obliczyć – r_A jest równe $\sqrt{10}-1$ (dlaczego?), podczas gdy r_B to 2. Odległość A i B jest zatem równa $\sqrt{10}-1$.

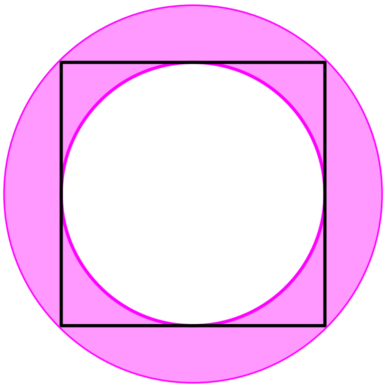


Rys. 4

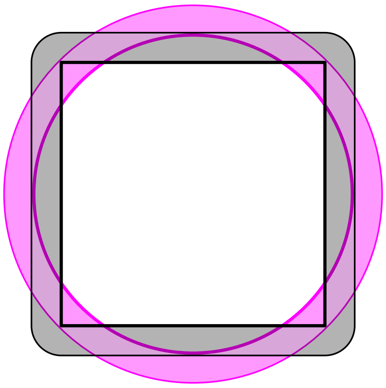
Wypada powiedzieć (na marginesie, by nie przerażać Czytelnika), że ten sposób mierzenia odległości między figurami (dodajmy: ograniczonymi i domkniętymi) nazywa się *metryką Hausdorffa.*



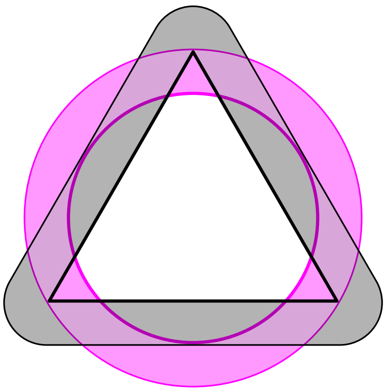
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Ten sposób mierzenia odległości figur spełnia warunki wymagane na to, by być pełnoprawną odległością. Odległość jest w sposób oczywisty równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy mierzymy odległość figury od niej samej. Symetria też wynika z definicji. Trochę trudniej jest sprawdzić, że spełniona jest nierówność trójkąta, ale Cierpliwy Czytelnik we współpracy z Sumiennym z pewnością sobie z tym poradzi.

Pamiętajmy jednak, że ten sposób mierzenia odległości jest dla nas tylko środkiem do celu, jakim ma być nie określenie, jak daleko jest konkretne koło A od konkretnego kwadratu B, lecz jak „w ogóle” koło jest odległe od kwadratu.

Co to znaczy „w ogóle”? Co chcielibyśmy przez to rozumieć? Wydaje się, że warto poszukać jakiejś miary, jak dalece koło nie jest kwadratem. Spróbujmy zatem zobaczyć, jak dalece koło może się do kwadratu zbliżyć (w sensie zaproponowanej odległości). Możemy przy tym koło dowolnie przemieszczać, powiększać i zmniejszać, starając się, by odległość między nim a kwadratem uczynić najmniejszą.

Koło opisane na kwadracie o boku $2p$ jest odległe od niego o $p(\sqrt{2}-1)$ (tyle równa się r_B, natomiast $r_A = 0$ – rys. 5). Koło wpisane w ten kwadrat jest od niego odległe też o $p(\sqrt{2}-1)$ (tyle wynosi r_A, natomiast tym razem $r_B = 0$ – rys. 6), ale każdy wpadnie na pomysł, że można tę odległość zmniejszyć, powodując, by – mówiąc potocznie – kwadrat wystawał z koła tyle samo, co koło z kwadratu (rys. 7). Promień r takiego okręgu spełnia warunek $p\sqrt{2} - r = r - p$, zatem $r = p\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Wobec tego

$$r_A = p\sqrt{2} - p\tfrac{\sqrt{2}+1}{2}, \quad r_B = p\tfrac{\sqrt{2}+1}{2} - p, \quad \text{czyli} \quad r_A = r_B = p\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Uzyskaliśmy wynik dwukrotnie mniejszy niż poprzednio i chyba nie trzeba specjalnie przekonywać, że to jest wynik najlepszy (czyli najmniejszy). Odpowiedź na tytułowe pytanie brzmi zatem:
odległość koła od kwadratu jest równa $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ *boku kwadratu.*

Ale idźmy dalej. W podobny sposób stwierdzimy (rys. 8), że
odległość koła od trójkąta równobocznego jest równa $\frac{\sqrt{3}}{12}$ *boku trójkąta,*

Może nawet przyjdzie nam do głowy, żeby to porównać – w tym celu należy to w obu przypadkach przeliczyć na promień okręgu. Otrzymamy wtedy (proszę samemu spróbować), że
odległość koła od kwadratu jest równa $3 - 2\sqrt{2}$ *promienia koła,*
a od trójkąta równobocznego równa $\frac{1}{3}$ *promienia koła,*
zatem, zgodnie z intuicją, kwadrat jest bliżej koła niż trójkąt równoboczny.

Gdy jednak spróbujemy obliczać odległość kwadratu od trójkąta równobocznego, zobaczymy, że sprawa, która już wydawała się łatwa, taka jednak nie jest. Bo zapewne optymalne wzajemne położenie kwadratu i trójkąta równobocznego to takie, w którym ich środki się pokrywają, ale jak trójkąt powinien być obrócony? Ten konkretny problem zapewne uda się Czytelnikom rozwiązać.

A co z innymi figurami? Gdy będą trudności, zrażać się nie należy. Bowiem prawda jest taka, że rozstrzygnięcie, jak badać opisaną tu odległość dowolnych dwu figur, jest jeszcze – jak wszyscy sądzą – daleko przed nami, a istniejące przybliżone algorytmy pozostawiają wiele do życzenia.

Małą Deltę opracował Marek KORDOS