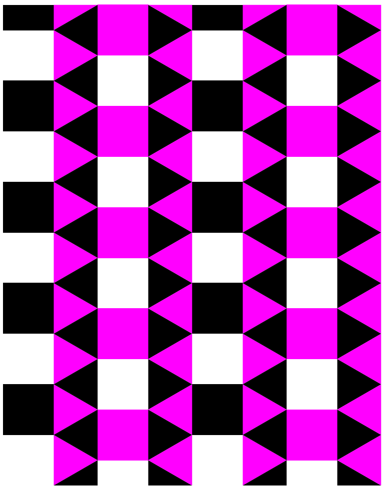
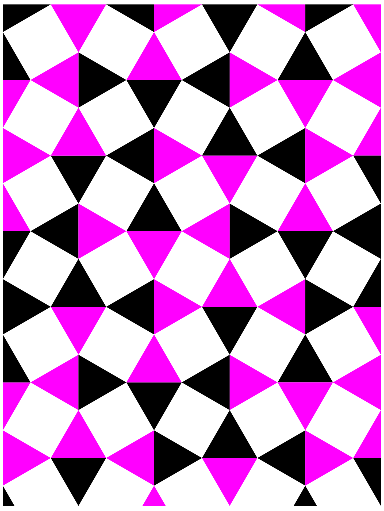
Rachunek to za mało

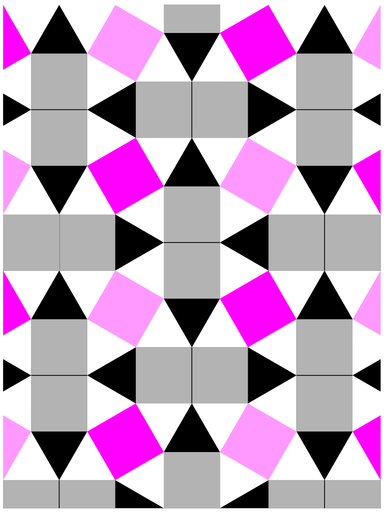
W każdym wierzchołku narysowanych niżej parkietów spotykają się trzy trójkąty i dwa kwadraty, są to więc parkiety jednorodne:



parkiet (3,3,3,4,4) – regularny,



parkiet (3,4,3,4,3) – regularny,



parkiet nieregularny, choć widać w nim wyraźny rytm. Czy można z wielokątów foremnych zbudować parkiet, w którym nie ma żadnego rytmu?

Parkiet to szczelne pokrycie płaszczyzny niezachodzącymi na siebie wielokątami. Tu będzie mowa tylko o parkietach, które składają się z wielokątów foremnych stykających się całymi bokami. Taki parkiet nazywamy jednorodnym, gdy w każdym wierzchołku spotykają się te same wielokąty i w tej samej liczbie (np. trzy trójkąty i dwa kwadraty). Parkiet jednorodny nazywamy regularnym, gdy (cykliczny) porządek tych wielokątów jest stale taki sam (np. stale (3,3,3,4,4) albo stale (3,4,3,4,3)). Powstaje pytanie, jaka jest liczba możliwych parkietów regularnych.

Kąt k-kąta foremnego to $\frac{k-2}{k}\cdot 180°$. Gdy w wierzchołku stykają się trzy wielokąty, mające odpowiednio k_1, k_2, k_3 boki, to musi być spełniony warunek

$$\frac{k_1-2}{k_1}\cdot 180° + \frac{k_2-2}{k_2}\cdot 180° + \frac{k_3-2}{k_3}\cdot 180° = 360°,$$

$$\text{zatem}\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{k_1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{k_2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{k_3}=1,\quad \text{czyli}\quad \frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}=\frac{1}{2}.$$

Sprawny Czytelnik bez trudu uogólni ten wynik na przypadek, gdy w wierzchołku styka się m wielokątów – będzie to

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}=\frac{m}{2}-1.$$

To są równania na k_i, przy czym interesują nas tylko rozwiązania w liczbach całkowitych większych od 2. Od razu widać, że przesadziliśmy z tym uogólnianiem: lewa strona każdego z tych równań nie przekracza $\frac{m}{3}$, a więc rozwiązania mogą być tylko dla m spełniających warunek

$$\frac{m}{3}\geqslant\frac{m}{2}-1,\quad \text{czyli}\quad m\leqslant 6.$$

Z nieskończonej liczby równań zostały więc tylko cztery: dla m równego $3,4,5$ lub 6. Zacznijmy je rozwiązywać. Na początek weźmy $m=3$ oraz dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $k_1\leqslant k_2\leqslant k_3$. Rozpocznijmy od przypadku, gdy $k_1=3$. Wtedy będziemy mieli

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}=\frac{1}{6}\ \Rightarrow\ k_3=\frac{6k_2}{k_2-6}\ \Rightarrow\ (k_2-6)|6k_2.$$

Ostatni warunek bierze się stąd, że k_3 musi być liczbą całkowitą. Sprawny Czytelnik bez trudu stwierdzi, że odpowiednie wartości k_2 to 7, 8, 9, 10 i 12, bo dla większych wartości, spełniających ostatni warunek (jakie to liczby?), będzie $k_2>k_3$. Stąd mamy pięć kandydatur na regularny parkiet: (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15) i (3,12,12). Kandydatur, bo Dociekliwy Czytelnik, kolega Sprawnego, stwierdzi – próbując te parkietaże narysować – że istnieje tylko jeden z nich: ten ostatni.

Kolejny przypadek, $k_1=4$ daje

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ k_3=\frac{4k_2}{k_2-4}\ \Rightarrow\ (k_2-4)|4k_2,$$

skąd otrzymamy trzy rozwiązania (4,5,20), (4,6,12) i (4,8,8) – tu jest lepiej: tylko pierwszemu rozwiązaniu nie odpowiada parkiet. Dla $k_1=5$ i $k_1=6$ otrzymamy odpowiednio

$$k_3=\frac{10k_2}{3k_2-10}\ \Rightarrow\ (3k_2-10)|10k_2\quad \text{oraz}\quad k_3=\frac{3k_2}{k_2-3}\ \Rightarrow\ (k_2-3)|3k_2,$$

co daje rozwiązanie (5,5,10), któremu nie odpowiada parkiet, i (6,6,6) z oczywistym parkietem.

Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla $m=4,5,6$, znów uzyskując więcej rozwiązań, niż będzie odpowiadających im parkietów regularnych: dla $m=4$ istnieją trzy parkiety (zapiszę je zgodnie z porządkiem wielokątów przy wierzchołku): (4,4,4,4), (3,6,3,6), (3,4,6,4); dla $m=5$ trzy: (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4) i odpowiadający temu samemu rozwiązaniu (3,4,3,4,3); dla $m=6$ tylko jedno: (3,3,3,3,3,3), zresztą rozwiązanie też jest tylko jedno.

Czy to znaczy, że nie można rachunkiem uzyskać tego samego, co rysunkiem?

M. K.