Gry nieskończone

Paweł PARYS[*]

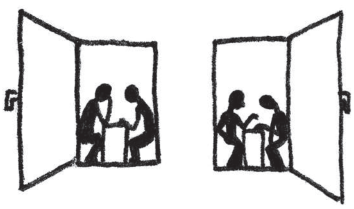
W tym artykule przedstawimy przykład gry, w której żadna strona nie ma strategii wygrywającej, choć każda konkretna rozgrywka kończy się zwycięstwem jednej ze stron.

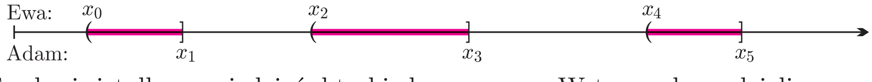
Słowo „gra” jest dość niejednoznaczne, dlatego ustalmy na początku, o jakich grach będzie mowa, a o jakich nie. Nie będzie na przykład nic o brydżu. W brydżu gracze nie znają kart innych osób, nie ma pełnej informacji. Co więcej, w brydża grają cztery osoby, a to dla nas za dużo. Będziemy rozważać tylko gry *dwuosobowe, z pełną informacją*, czyli takie, w których każdy gracz wie wszystko o aktualnym stanie gry. Tak jest, na przykład, w szachach lub w grze w kółko i krzyżyk, jednak o tych grach też nie opowiemy, bo możliwy jest w nich remis. Zajmujemy się tylko grami, w których *nie ma remisów*, czyli każda rozgrywka kończy się zwycięstwem jednej ze stron. Takie (być może znane niektórym Czytelnikom) gry to *nim* i *hex*. A oto inny prosty przykład: pierwszy gracz (tradycyjnie będzie nazywany Ewą) mówi liczbę całkowitą, potem drugi z graczy (Adam) mówi inną liczbę i wygrywa ta osoba, czyjej liczba jest większa. Tutaj każda rozgrywka kończy się czyimś zwycięstwem.

W tej grze może wygrać każdy z graczy, choć oczywiste jest, że drugi gracz, jeśli tylko chce, może pokonać pierwszego. W takiej sytuacji, gdy gracz może doprowadzić do wygranej niezależnie od zachowania przeciwnika, będziemy mówić, że ma on *strategię wygrywającą*. Jakie mamy możliwości w dowolnej grze? Każdy z graczy może mieć lub nie mieć strategii wygrywającej. Oczywiście, nie mogą jej mieć obaj naraz. Jednak czy może się zdarzyć, że żaden z graczy nie ma strategii wygrywającej? Intuicyjnie taka sytuacja wydaje się niemożliwa, lecz w rzeczywistości nie jest to wcale takie proste. Jeśli założymy, że każda rozgrywka jest skończona, to można ten fakt dość łatwo udowodnić (przez indukcję). Okazuje się jednak, że jeśli w grze dopuszczamy nieskończenie wiele ruchów, to nie jest to wcale prawdą – istnieje gra, w której żadna strona nie ma strategii wygrywającej.

Czym w ogóle jest *gra nieskończona*? Nie chodzi o to, że gracze nigdy nie skończą grać i dlatego nikt nie wygra. W naszej grze trzeba wykonać wszystkie nieskończenie wiele ruchów, i dopiero wtedy okaże się, kto wygrał. Oto przykład takiej gry: Ewa i Adam na zmianę podają liczby całkowite. Jeśli w powstałym ciągu pojawi się nieskończenie wiele razy liczba 5, to wygrywa Adam, a jeśli nie, to Ewa. Proszę zwrócić uwagę, że tutaj w żadnej chwili gry nie wiemy jeszcze, kto wygra, zwycięzcę można wyłonić dopiero po wszystkich nieskończenie wielu ruchach. Gra ta nie jest jednak specjalnie ciekawa – Adam może mówić cały czas 5 i wygrać niezależnie od posunięć Ewy, ma zatem trywialną strategię wygrywającą.

Teraz skonstruujemy inną grę (to już ta właściwa). Ewa i Adam na przemian podają coraz to większe liczby naturalne. Powiedzmy, że są to $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$, przy czym Ewa podała $x_0, x_2, \ldots$, a Adam $x_1, x_3, \ldots$. Będą to początki i końce przedziałów liczb naturalnych, z lewej strony otwartych, z prawej domkniętych (liczby Ewy otwierają, a liczby Adama zamykają przedziały). Pierwszy przedział to $(x_0, x_1] = \{x_0+1, x_0+2, \ldots, x_1\}$, drugi $(x_2, x_3]$, itd. Suma tych przedziałów to pewien zbiór liczb naturalnych i to na niego będziemy patrzeć po zakończeniu gry.





Trzeba już tylko powiedzieć, kto kiedy wygrywa. W tym celu podzielimy wszystkie zbiory liczb naturalnych na „małe” i „duże”. Jeśli wynikowy zbiór będzie duży, to wygra Ewa, a jeśli mały, to Adam. Jak dokonujemy podziału? Chcemy, aby zachodziły następujące, intuicyjne warunki:

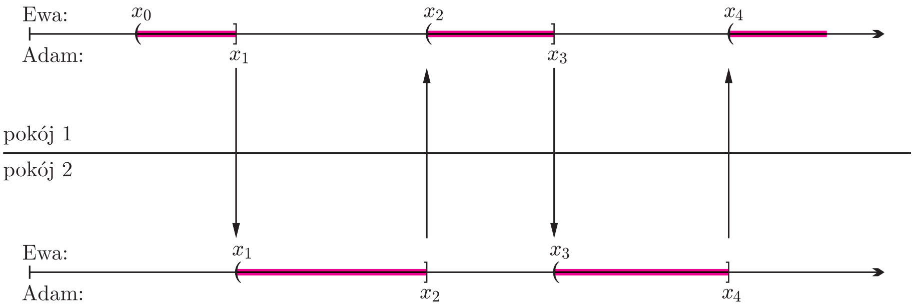
- każdy podzbiór zbioru liczb naturalnych jest albo duży, albo mały,
- zbiory skończone są małe,
- jeśli zbiór $U \subset \mathbb{N}$ jest mały, to zbiór pozostałych liczb (czyli $\mathbb{N} \setminus U$) jest duży i odwrotnie,
- jeśli zbiory U i V są małe, to ich suma $U \cup V$ też,
- podzbiór zbioru małego jest mały.

[*]student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Te warunki mówią nam już, że każdy zbiór, który zawiera prawie wszystkie liczby naturalne (czyli wszystkie oprócz skończenie wielu), jest duży. O zbiorach takich, jak na przykład zbiór liczb parzystych, jeszcze nic nie wiadomo, mamy tu dużą dowolność. Możemy go uznać na przykład za mały, potem uznać za małe wszystkie jego podzbiory i ich sumy z innymi małymi zbiorami, a jako duże ich uzupełnienia. Proszę sprawdzić, że wtedy nic się nie popsuje, żaden zbiór nie będzie musiał być naraz mały i duży. Potem bierzemy kolejny zbiór, o którym jeszcze nic nie wiadomo i powtarzamy operację. Trudność polega na tym, że wszystkich zbiorów jest bardzo, bardzo dużo. Okazuje się jednak, że całą tę klasyfikację można rozszerzyć na wszystkie podzbiory zbioru liczb naturalnych, ale precyzyjny dowód tego faktu pominiemy.

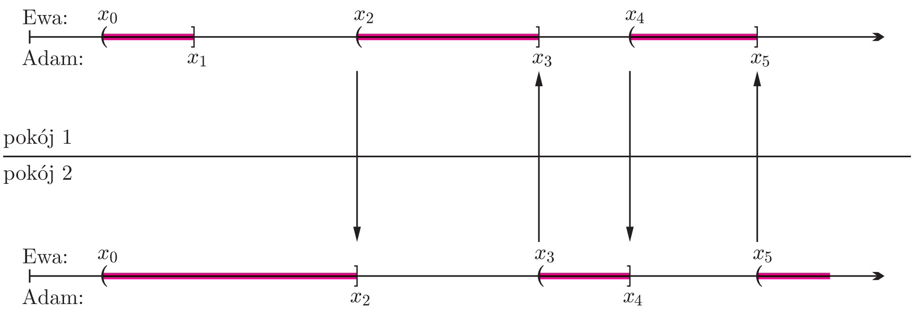
Nasze warunki oznaczają, że rodzina zbiorów „dużych” ma stanowić tzw. *ultrafiltr*, który zawiera wszystkie zbiory o skończonych dopełnieniach. Dowód istnienia takiego ultrafiltru jest niekonstruktywny, wymaga pewnika wyboru. Jeżeli odrzucić pewnik wyboru, to gry bez strategii wygrywającej nie da się w ogóle skonstruować.

Mamy więc zdefiniowaną grę: Adam wygrywa, gdy suma przedziałów jest zbiorem małym, a Ewa, gdy dużym. Aby pokazać, że żaden z graczy nie ma strategii wygrywającej, zastosujemy technikę zwaną *podkradaniem strategii.* Będziemy rozgrywać równolegle dwie partie w dwóch pokojach. Przypuśćmy najpierw, nie wprost, że Adam ma strategię wygrywającą i zacznijmy dwie rozgrywki, wcielając się w Ewę. W pierwszym pokoju zaczynamy od zrobienia jakiegokolwiek ruchu. Następnie kopiujemy ruchy Adama, tzn. liczbę, którą usłyszymy od Adama, wypowiadamy w drugim pokoju, następnie czekamy w nim na ruch Adama i podaną przez niego liczbę wypowiadamy w pierwszym pokoju i tak dalej.



Adam w obu pokojach z nami wygrywa, bo założyliśmy, że ma strategię wygrywającą. Zatem oba zbiory $(x_0, x_1] \cup (x_2, x_3] \cup \ldots$ oraz $(x_1, x_2] \cup (x_3, x_4] \cup \ldots$ są małe. Ale wtedy też ich suma, czyli zbiór (x_0, ∞) musiałby być zbiorem małym, co nie jest prawdą, bo zawiera wszystkie liczby oprócz skończenie wielu, czyli jest duży. A zatem sprzeczność, która dowodzi, że Adam nie mógł mieć strategii wygrywającej.

Jeśli Ewa ma strategię wygrywającą, postępujemy podobnie. Teraz w obu pokojach gramy jako Adam. Pierwszy ruch robi Ewa. W pierwszym pokoju pierwszej odpowiedzi udzielamy dowolnie. Następnie w obu kopiujemy ruchy Ewy.



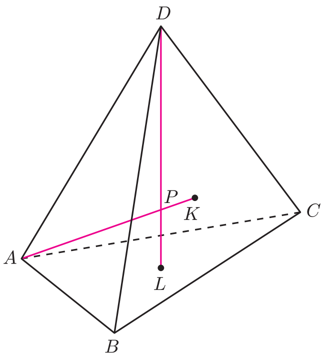
Teraz oba zbiory wynikowe są duże, bo Ewa bez problemów wygrywa. Z warunków o zbiorach dużych i małych wynika, że wtedy zbiór $(x_0, x_1]$ jest duży (jest on przecięciem zbiorów dużych). To jednak niemożliwe, bo zawiera skończenie wiele liczb. Zatem i tym razem dostajemy sprzeczność.

Ostatecznie więc w naszej grze żaden z graczy nie ma strategii wygrywającej. Mamy więc grę, w którą można sobie ciekawie pograć: nikt nie może mieć pewności, że nas ogra, a jednocześnie my też nie umiemy z każdym wygrać. Trzeba tylko nauczyć się wykonywać każdy ruch dwa razy szybciej niż poprzedni…

Rozwiązanie zadania M 1181.

Odp.: Nie w każdym czworościanie wysokości przecinają się w jednym punkcie.

Niech $ABCD$ będzie czworościanem oraz przyjmijmy, że wysokości AK i DL przecinają się w punkcie P.



Ponieważ prosta AK jest prostopadła do płaszczyzny BCD, więc $AK \perp BC$. Analogicznie $DL \perp BC$. Stąd wynika, że płaszczyzna wyznaczona przez wysokości AK i DL jest prostopadła do prostej BC, skąd w szczególności otrzymujemy $AD \perp BC$.

Jeśli zatem $ABCD$ jest czworościanem, w którym przeciwległe krawędzie AD i BC nie są prostopadłe, to wysokości poprowadzone z wierzchołków A i D nie mają punktów wspólnych.

Uwaga: Można wykazać, że wysokości czworościanu przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwie przeciwległe krawędzie tego czworościanu są prostopadłe. Takie czworościany noszą nazwę *czworościanów ortocentrycznych.*