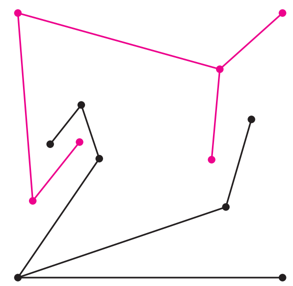
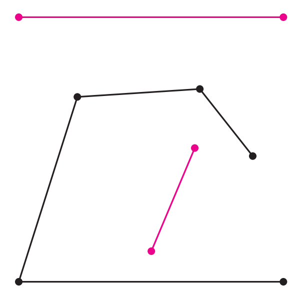
Informatyczny kącik olimpijski (1)



Rys. 1



Rys. 2

Informatyczny kącik olimpijski otwiera zadanie z IOI (Międzynarodowej Olimpiady Informatycznej) 2006. Oto ono:

> Mamy dane N punktów, spośród których 4 są wierzchołkami kwadratu, a pozostałe leżą w jego wnętrzu. Żadne 3 punkty nie są współliniowe i każdy jest jednego z dwóch kolorów (dwa sąsiednie wierzchołki kwadratu są czarne, a pozostałe dwa – kolorowe). Należy dorysować $N-2$ odcinki, każdy z nich o końcach w punktach tego samego koloru tak, aby każda para punktów o tych samych kolorach była połączona albo odcinkiem, albo ciągiem odcinków. Żadne dwa z narysowanych odcinków nie mogą się przecinać. Przykład rozwiązania jest na rysunku 1.

Treść zadania dopuszcza możliwość, że rozwiązanie nie istnieje. Żeby odkryć, kiedy rozwiązanie istnieje, a kiedy nie, należałoby spróbować rozwiązać kilka przypadków „ręcznie”. W ten sposób można wpaść na kilka sugestii, jak podejść do niego w sposób bardziej usystematyzowany – a więc na trop algorytmu.

Gdybyśmy próbowali łączyć punkty „na chybił trafił”, tj. wybierając dowolne pary, moglibyśmy wpaść w ślepy zaułek. Odcinki nie mogą się bowiem przecinać, a łącząc je dowolnie, moglibyśmy „odciąć” część z punktów czarnych lub kolorowych. Przykład jest na rysunku 2 – czarne punkty są połączone, ale kolorowych punktów już nie da się połączyć, nie przecinając żadnego odcinka czarnego z kolorowym.

Uprośćmy sobie na razie zadanie – co się stanie, jeśli zamiast kwadratu byłby trójkąt, o dwóch wierzchołkach jednego koloru (A i B), a trzecim (C) innego koloru? Przyjmijmy, że C jest czarny. Wtedy, jeśli wewnątrz ABC istnieją punkty czarne, to na pewno istnieje jakiś punkt X, połączony z C odcinkiem czarnym. Przyjrzyjmy się temu wyróżnionemu punktowi. Leży on wewnątrz trójkąta i jest tego samego koloru co C. W takim razie trójkąt ABX jest kolorystycznie tego samego typu co ABC. Z pozostałymi parami wierzchołków jest tak samo, tyle tylko, że kolory zamieniają się rolami – trójkąty CAX i BCX mają po dwa czarne i jeden kolorowy wierzchołek. To spostrzeżenie prowadzi nas do algorytmu:

> *Dane:* Trójkąt ABC (A połączone odcinkiem z B) z, opcjonalnie, czarnymi i kolorowymi punktami wewnątrz.
>
> 1. Jeśli w środku nie ma punktów, lub są tylko czarne lub kolorowe, rozwiązanie jest natychmiastowe.
> 2. Wybieramy dowolny wierzchołek X koloru tego samego co C, i łączymy go z C.
> 3. Rekurencyjnie wywołujemy procedurę dla trójkątów ABX, BCX i CAX.

Powyższa rekurencja jest skończona, ponieważ za każdym wywołaniem liczba punktów wewnętrznych spada co najmniej o 1 (punkt X). Jeśli zadaniem powyższego algorytmu nazwiemy połączenie wszystkich punktów czarnych i kolorowych w dwie spójne składowe, to jego poprawności prosto dowodzi się przez indukcję. Przy dowodzie przyda się założenie, że żadne trzy punkty nie są współliniowe – w szczególności, żadne „dodatkowe” punkty nie leżą na odcinkach łączących pary punktów A, B, C i X.

Jak to się ma do oryginalnego problemu? Można oczywiście spróbować skonstruować analogiczny algorytm dla czworokątów. Ale jeśli wstępny kwadrat oznaczymy $ABCD$ – A i B tego samego koloru, podobnie jak C i D – i połączymy A z B oraz C z D, a następnie już posiadany algorytm zastosujemy dla trójkątów ABC i CDA, to rozwiązany zostanie i przypadek czworokąta.

Jaka jest złożoność algorytmu? Oznaczmy przez L rozmiar zadania – liczbę punktów w trójkącie, wyłączając wierzchołki. Niech $T(L)$ będzie kosztem rozwiązania zadania o rozmiarze L. Wtedy mamy $T(0)=O(1)$, oraz

$$T(L)=\max_{a+b+c=L-1}(T(a)+T(b)+T(c))+O(L).$$

Rozwiązaniem tej rekurencji jest $T(L)=O(L^2)$. Gdyby udałoby nam się ograniczyć zmienne a, b i c – np. przez $a,b,c\leqslant\frac{1}{2}L$ – to rozwiązaniem byłoby już $T(L)=O(L\log L)$. Istnieje taki sposób, ale wymaga sortowania punktów wewnątrz trójkąta. Jeśli mamy wybrać punkt X koloru czarnego, to sortujemy punkty czarne kątowo dookoła wierzchołka A i wybieramy taki, który nie znajduje się w pierwszej $\frac{1}{6}$ ani w ostatniej $\frac{1}{6}$ punktów i podobnie dla wierzchołków B i C. W ten sposób $a,b,c\leqslant\frac{5}{6}L$ – ale równanie robi się bardziej skomplikowane. Jeśli L_1 to liczba punktów tego koloru co punkt X, a L_2 – drugiego koloru ($L_1+L_2=L$), to mamy $T(L_1,L_2)=\max(T(a_1,a_2)+T(b_1,b_2)+$ $+T(c_1,c_2))+O(L\log L)$, gdzie maksimum jest brane po $a_1+b_1+c_1=L_1-1$, $a_2+b_2+c_2=L_2$, $a_1,b_1,c_1\leqslant\frac{5}{6}L_1$. Rozwiązanie i tu ma prostą postać:

$$T(L_1,L_2)=O(L\log^2 L).$$

W praktyce, równie dobry – albo i lepszy – wynik otrzymalibyśmy, losując po prostu punkt X.

Filip WOLSKI