



### Rozwiązanie zadania F 709.

Siła ta wynosi

$$F = \Delta p S = (p_0 - p)S,$$

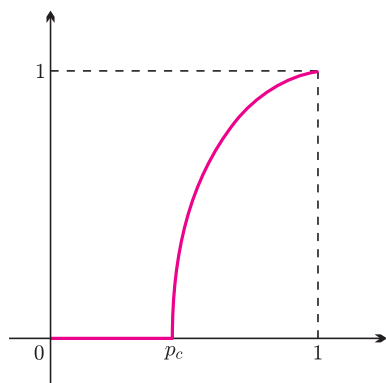
gdzie  $S$  to pole powierzchni pokrywki, a  $\Delta p$  to różnica ciśnień między ciśnieniem atmosferycznym a ciśnieniem powietrza ochłodzonego i o zmienionej objętości wewnątrz naczynia. Z równania gazu doskonałego mamy:

$$\frac{p_0(V_0 - V_l)}{T_0} = \frac{p(V_0 - V_w)}{T},$$

gdzie  $p_0$  to ciśnienie atmosferyczne,  $p$  nowa wartość ciśnienia,  $V_l$  objętość lodu,  $V_w$  to objętość wody, a  $V_0$  naczynia. Mamy zatem:

$$F = p_0 S \left( \frac{V_l - V_w}{V_0 - V_w} + \frac{\Delta T}{T} \frac{V_0 - V_l}{V_0 - V_w} \right).$$

Przyjmując  $V_0 = 200 \text{ cm}^3$ ,  $T_0 = 273 \text{ K}$ ,  $\Delta T = 20 \text{ K}$ ,  $S = 20 \text{ cm}^2$  oraz  $V_l = 110 \text{ cm}^3$ , otrzymujemy  $F \approx 30 \text{ N}$ .



Rys. 1

## Teoria perkolacji

Rafał LATAŁA\*

Rozpatrzmy kratę  $d$  wymiarową, tzn. graf nieskończony, w którym zbiorem wierzchołków jest  $\mathbb{Z}^d$ , a krawędziami połączono punkty w odległości 1. Załóżmy też, że dysponujemy monetą, w której orzeł wypada z prawdopodobieństwem  $p$ , a reszka  $1 - p$ , gdzie  $p$  jest liczbą z przedziału  $[0, 1]$  i wyobraźmy sobie, że wykonaliśmy nią nieskończenie wiele rzutów. Przeprowadźmy teraz następującą operację – każdej krawędzi przyporządkujmy jeden z rzutów monetą (każdej inny) i jeśli wypadła w nim reszka, to usuńmy krawędź z grafu (taką krawędź nazywa się też zamkniętą), a jeśli orzeł, to ją zostawmy (krawędź otwarta).

Otrzymamy w ten sposób losowy podgraf  $G_p$  grafu  $\mathbb{Z}^d$  – teoria perkolacji zajmuje się własnościami tego podgrafu. Jeśli wykonamy np. symulację komputerową takiego losowania (patrz str. 11), to zauważymy, że dla małych wartości  $p$  krawędzi otwartych jest mało,  $G_p$  składa się z wielu niewielkich składowych (składową grafu nazywamy zbiór wierzchołków, z których każde dwa łączy ścieżka złożona z krawędzi grafu), a dla dużych  $p$  sytuacja jest odmienna – większość krawędzi otwartych tworzy jedną ogromną składową, pozostałe zaś grupują się w rozproszone niewielkie składowe.

Skłania nas to do postawienia następujących pytań:

- Dla jakich  $p$  istnieje nieskończona składowa? Ile jest nieskończonych składowych?
- Z jakim prawdopodobieństwem 0 należy do nieskończonej składowej?
- Jeśli nie ma nieskończonej składowej, to jaka jest „typowa” wielkość składowej zawierającej 0?

Narzucającą się intuicją jest to, że im większe  $p$ , tym krawędzi otwartych jest więcej. Łatwo tę ideę sformalizować – wystarczy zamiast rzutów krawędziom przyporządkować losowo wybrane liczby z odcinka  $[0, 1]$ , a następnie powiedzieć, że dana krawędź należy do  $G_p$ , jeśli przyporządkowana jej liczba nie przekracza  $p$ . Przy tej konstrukcji zawsze  $G_p$  jest podzbiorem  $G_q$  przy  $p < q$ .

Podstawową funkcją, jaką się rozważa, jest *funkcja perkolacji*  $\theta_d$ . Wartość  $\theta_d(p)$  definiuje się jako prawdopodobieństwo tego, że 0 należy do nieskończonej składowej. Oczywiście,  $\theta_d(0) = 0$ ,  $\theta_d(1) = 1$  oraz  $\theta_1(p) = 0$  dla  $p < 1$ . Symulacje wskazują, że dla  $d \geq 2$  funkcja perkolacji wygląda mniej więcej jak na rysunku 1.

Warto może wspomnieć, że nie jesteśmy w stanie symulować całej nieskończonej kraty. Ale np. istnienie nieskończonej składowej zawierającej 0 można dobrze aproksymować, sprawdzając, czy 0 jest połączone otwartą ścieżką z brzegiem kostki  $[-n, n]^d$  dla odpowiednio dużego  $n$ .

Funkcja  $\theta_d$  jest niemalejąca (im większe  $p$ , tym graf  $G_p$  większy). Pozwala nam to wprowadzić definicję *prawdopodobieństwa krytycznego*:

$$p_c(d) := \sup\{p: \theta_d(p) = 0\}.$$

Zatem  $\theta_d(p) = 0$  dla  $p < p_c(d)$  oraz  $\theta_d(p) > 0$  dla  $p > p_c(d)$ .

**Twierdzenie.** Dla  $d \geq 2$ , zachodzi  $0 < p_c(d) < 1$ .

**Dowód.** i)  $p_c(d) > 0$ , czyli  $\theta_d(p) = 0$  dla  $p$  małych.

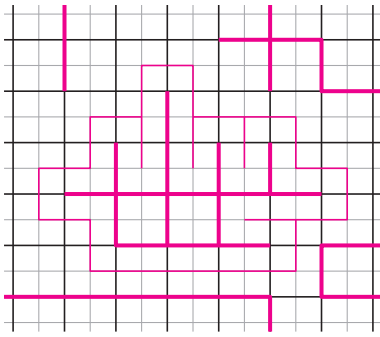
Jeśli składowa otwarta, zawierająca 0, jest nieskończona, to dla dowolnego  $n$  istnieje ścieżka długości  $n$  bez samoprzecięć, wychodząca z 0, złożona z krawędzi otwartych. Wszystkich ścieżek bez samoprzecięć, wychodzących z 0, jest  $f_n \leq 2d(2d - 1)^{n-1}$  (pierwszą krawędź możemy wybrać na  $2d$  sposobów, kolejne na nie więcej niż  $2d - 1$ , bo nie możemy się „cofnąć”). Prawdopodobieństwo tego, że ustalona ścieżka długości  $n$  jest otwarta, wynosi  $p^n$ . Stąd

$$\theta_d(p) \leq f_n p^n \leq 2dp((2d - 1)p)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

dla  $p < (2d - 1)^{-1}$ .

ii)  $p_c(d) < 1$ , czyli  $\theta_d(p) > 0$  dla  $p$  bliskich 1.

\*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 2

Ponieważ  $\theta_d(p) \geq \theta_2(p)$  (krata  $\mathbb{Z}^2$  zanurza się w kratę  $\mathbb{Z}^d$ ), więc wystarczy wykazać, że  $\theta_2(p) > 0$  dla  $1 - p$  małych. Zauważmy, że jeśli składowa, zawierająca 0, jest skończona, to na kracie przesuniętej o  $(1/2, 1/2)$  istnieje pętla przecinająca tylko krawędzie zamknięte (zob. rys. 2).

Wszystkich pętli długości  $n$  wokół 0 jest  $g_n \leq n3^n$  (pętla musi przeciąć półoś  $\overrightarrow{0X}$  w odległości od 0 nie większej niż  $n$ , każdą kolejną krawędź możemy wybrać na co najwyżej 3 sposoby), a prawdopodobieństwo tego, że ustalona pętla przecina tylko zamknięte krawędzie, wynosi  $(1 - p)^n$ . Zatem

$$1 - \theta_2(p) \leq \sum_{n=4}^{\infty} g_n(1 - p)^n \leq \sum_{n=4}^{\infty} n(3(1 - p))^n < 1$$

dla odpowiednio małego  $1 - p$ . Koniec dowodu.

Jeśli  $p < p_c(d)$ , to  $\theta_d(p) = 0$ , co pociąga za sobą nieistnienie z prawdopodobieństwem 1 żadnej nieskończonej składowej. Udowodniono, że prawdopodobieństwo tego, że skończona składowa zawierająca 0 ma przynajmniej  $n$  elementów, maleje wykładniczo z  $n$ .

Dla  $p > p_c(d)$  jest  $\theta_d(p) > 0$ , co na mocy tzw. prawa zero-jedynkowego implikuje, że prawdopodobieństwo istnienia nieskończonej składowej wynosi 1. Można wykazać też nieco mniej oczywisty fakt, że nieskończona składowa jest z prawdopodobieństwem 1 tylko jedna.

Widzimy więc, że w punkcie  $p_c(d)$  graf  $G_p$  zmienia własności, mówimy w takiej sytuacji, że mamy do czynienia z *przejściem fazowym*.

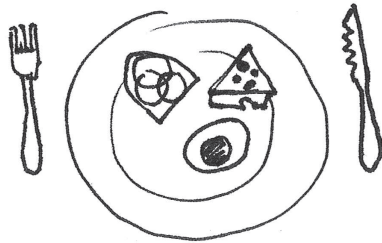
Wnikliwy Czytelnik zada na pewno pytanie, co się dzieje dla  $p = p_c(d)$ . Przypuszcza się, że  $\theta_d(p_c(d)) = 0$  (czyli z prawdopodobieństwem 1 nie ma nieskończonej składowej), ale udowodniono to tylko dla  $d = 2$  oraz  $d$  odpowiednio dużych. Najprostszy i najciekawszy otwarty przypadek dotyczy kraty trójwymiarowej.

Jak widać, już pytanie o ciągłość funkcji perkolacji w punkcie  $p_c(d)$  jest bardzo trudne. Można udowodnić, że  $\theta_d$  jest ciągła w pozostałych punktach. Symulacje sugerują, że jest ona wklęsła na  $(p_c(d), 1]$ , ale nie jest to udowodnione. Można zadawać kolejne pytania o własności  $\theta_d$  – np. różniczkowalność czy szybkość wzrostu w prawostronnym otoczeniu  $p_c(d)$ . Co ciekawe, najtrudniej na te pytania odpowiedzieć dla niskich wymiarów  $d$ .

Ile wynosi wartość  $p_c(d)$ ? Dokładna odpowiedź jest znana tylko dla  $d \leq 2$ ,  $p_c(1) = 1$ ,  $p_c(2) = 1/2$ . Wyznaczenie tej drugiej wartości zajęło 20 lat (ostatecznie zrobił to Kesten w 1980 roku), podstawowym pomysłem dowodu jest wykorzystanie kraty dualnej, której krawędzie przecinają krawędzie wyjściowej kraty – ideę tę wykorzystywaliśmy już w dowodzie twierdzenia. Symulacje pokazują, że  $p_c(3) \approx 0,2488$ ,  $p_c(4) \approx 0,1601$ ,  $p_c(5) \approx 0,1182$ . Wiadomo też, że  $p_c(d + 1) < p_c(d)$  oraz  $p_c(d) = \frac{1}{2d} + \frac{1}{4d^2} + \frac{7}{16d^3} + O(d^{-4})$  przy  $d \rightarrow \infty$ .

Oczywiście, nie musieliśmy zaczynać od kraty, bada się też perkolację na innych grafach nieskończonych. Najlepiej zrozumiana jest perkolacja na drzewach; co ciekawe, istnieją drzewa, dla których funkcja perkolacji nie jest ciągła w punkcie  $p_c$ . Rozważa się też modele perkolacji wierzchołkowej – usuwa się w nich z grafu nie krawędzie, lecz wierzchołki.

Teorię perkolacji stworzyli Broadbent i Hammersley w 1957 roku, by modelować przepływ cieczy przez porowaty materiał (na przykład skałę). Sieć kanalików w takiej skale przybliża się kratą trójwymiarową, otwartość krawędzi oznacza, że kanalik jest na tyle szeroki, by umożliwić przepływ cieczy, zaś istnienie nieskończonej składowej mówi, że górną powierzchnię skały łączy z dolną ścieżka złożona z odpowiednio szerokich kanalików, czyli ciecz przecieknie przez skałę. Zagadnienie doprowadziło do stworzenia prostego modelu matematycznego, który okazał się bardzo ciekawy – umożliwił postawienie wielu elementarnych pytań, z których wiele do dziś nie doczekało się odpowiedzi.



#### Rozwiązanie zadania M 1195.

Załóżmy najpierw, że wśród liczb  $p_1, p_2, \dots, p_{100}$  nie ma liczby 2 oraz przyjmijmy bez straty ogólności, że  $p_1 \geq p_k$  dla  $k = 2, 3, \dots, 100$ . Ponieważ liczby  $p_1, p_2$  są nieparzyste, więc  $p_1$  jest dzielnikiem iloczynu

$$\frac{p_2 - 1}{2} \cdot \frac{p_2 + 1}{2},$$

a więc i jednego spośród powyższych czynników. Stąd wynika, że

$$p_1 \leq \frac{1}{2}(p_2 + 1) \leq \frac{1}{2}(p_1 + 1),$$

czyli  $p_1 \leq 1$  – sprzeczność.

Załóżmy z kolei, że wśród liczb  $p_1, p_2, \dots, p_{100}$  występuje liczba 2 oraz bez straty ogólności przyjmijmy, że  $p_{100} = 2$ . Wtedy  $p_{99} \mid 2^2 - 1$ , co oznacza, że  $p_{99} = 3$ . Wobec tego  $p_{98} \mid 3^2 - 1$ , co z kolei implikuje równość  $p_{98} = 2$ . Kontynuując, uzyskujemy ciąg  $p_1, p_2, \dots, p_{100}$  spełniający warunki zadania: 3, 2, 3, 2, ..., 3, 2.

Uwalniając się od założenia  $p_{100} = 2$ , otrzymujemy dwa ciągi spełniające warunki zadania: 3, 2, 3, 2, ..., 3, 2 oraz 2, 3, 2, 3, ..., 2, 3.