Największa liczba na świecie

Tomasz BARTNICKI[*]

Ludzie od niepamiętnych czasów prześcigali się w biciu rekordów w najprzeróżniejszych dziedzinach, od czysto sportowych (szybciej, wyżej, mocniej), poprzez cywilizacyjne (wyższe budowle, większe samoloty, szybsze komputery), aż po całkiem absurdalne, żeby nie powiedzieć głupie. Taka już jest bowiem nasza natura, że jeśli tylko mamy szansę zrobienia czegoś w najlepszy z możliwych sposobów, to na pewno podejmiemy próbę zrobienia tego. Mania bicia rekordów nie ominęła również matematyków, którzy prześcigają się w znajdowaniu coraz większych liczb pierwszych czy też coraz dłuższych rozwinięć dziesiętnych liczby π. W artykule tym zaprezentujemy jeden z takich matematycznych rekordów. Przedstawimy największą liczbę, jaka kiedykolwiek została użyta w pracy matematycznej.

Aby dobrze zrozumieć, co wyraża największa liczba na świecie, konieczne będzie krótkie wprowadzenie, które zaczniemy od prostej obserwacji matematyczno-socjologicznej.

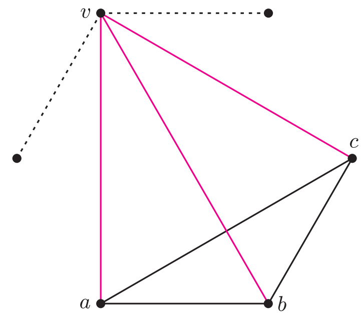
Sześć osób na przyjęciu

Wyobraźmy sobie, że w jakimś miejscu (np. na przyjęciu) spotyka się pewna grupa ludzi i, jak to w życiu zwykle bywa, niektórzy z nich znają się, inni zaś są sobie obcy. Możemy założyć, że relacja bycia znajomym jest określona dla każdej pary osób (albo się znają, albo nie znają) i jest symetryczna (jak ja znam ciebie, to i ty znasz mnie). Jeśli spojrzymy teraz na dowolną grupę złożoną z sześciu osób i przeanalizujemy układ znajomości między nimi, to łatwo dojdziemy do następującego spostrzeżenia:

Twierdzenie 1. *Wśród dowolnych sześciu osób zawsze znajdziemy:*
albo trzy osoby, które znają się wzajemnie (każda z każdą),
albo trzy osoby, które nie znają się wcale (żadna z żadną).

Dowód. Aby udowodnić ten fakt, przeformułujemy go na język teorii grafów następująco: każdą z sześciu osób utożsamiamy z innym wierzchołkiem grafu, a następnie każdą parę wierzchołków (osób) łączymy krawędzią. Powstanie w ten sposób graf, który nazywamy *grafem pełnym* (lub *kliką*) na sześciu wierzchołkach i oznaczamy przez K_6. Układ znajomości przedstawiamy w ten sposób, że każdej krawędzi nadajemy jeden z dwóch kolorów: zielony – jeśli osoby umieszczone w wierzchołkach, które ona łączy, znają się, lub czarny – jeśli osoby te nie znają się. Wystarczy teraz pokazać, że przy dowolnym takim zielono-czarnym kolorowaniu krawędzi zawsze znajdziemy trzy wierzchołki połączone krawędziami w jednym kolorze (tworzące zieloną lub czarną klikę K_3).

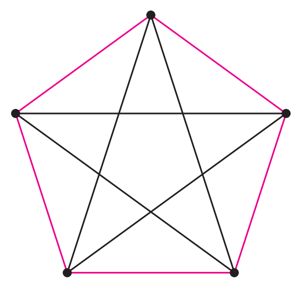
Ustalmy w pokolorowanym już grafie dowolny wierzchołek v i zauważmy, że skoro wychodzi z niego pięć krawędzi, to co najmniej trzy z nich muszą być w tym samym kolorze, powiedzmy zielonym.



Rys. 1. Jednokolorowa klika K_3 w grafie K_6.

Oznaczmy wierzchołki na drugich końcach tych krawędzi przez a, b, c i przeanalizujmy kolorowanie powyższego układu (rysunek 1). Ponieważ krawędzie va, vb oraz vc są zielone, to nadanie koloru zielonego którejkolwiek z krawędzi ab, bc lub ac spowoduje pojawienie się trójkąta w tym kolorze (odpowiednio vab, vbc lub vac). Z kolei, jeśli wszystkie mają kolor czarny, otrzymujemy czarny trójkąt abc, co kończy dowód.

Warto jeszcze zauważyć, że w powyższym twierdzeniu liczby sześć nie możemy zmniejszyć, gdyż w grupie pięcioosobowej możemy tak dobrać układ znajomości, aby uniknąć monochromatycznego trójkąta (tak jak na rysunku 2).



Rys. 2. Kolorowanie grafu K_5 bez jednokolorowej kliki K_3.

Twierdzenie Ramseya

Nasuwa się pytanie, czy twierdzenie o sześciu osobach można uogólnić. Czy, jeżeli zamiast żądać pojawienia się jednokolorowej kliki trzyosobowej, zażądamy, aby taka klika składała się z czterech osób, to czy w odpowiednio dużej grupie musi się ona pojawić? Co wreszcie z ogólnym przypadkiem dowolnej kliki K_k? W 1930 ukazała się praca Franka Ramseya, w której udowodnił on bardzo daleko idące uogólnienie naszych rozważań, a szczególnym przypadkiem była odpowiedź na postawione wcześniej pytanie.

Twierdzenie 2 (Ramsey (1930)). *Dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba naturalna n, że wśród dowolnych n osób zawsze znajdziemy:*
albo k osób, które znają się wzajemnie (każda z każdą),
albo k osób, które nie znają się wcale (żadna z żadną).

Najmniejsze takie n, którego istnienie gwarantuje powyższe twierdzenie, oznaczamy przez $R(k)$ i nazywamy *k-tą liczbą Ramseya.*

[*]Instytut Matematyki, Uniwersytet Zielonogórski

Można powiedzieć trochę filozoficznie, że twierdzenie Ramseya mówi o nieuchronności pojawiania się pewnych regularności w dużych strukturach. Dla każdego małego obiektu matematycznego możemy zawsze znaleźć odpowiednio dużą strukturę, w której obiekt ten musi się pojawić.

Liczby Ramseya i kosmici

Pojawia się następny naturalny problem: czy istnieje jakiś jawny wzór na kolejne liczby Ramseya, a jeśli nie, to czy można je chociaż efektywnie wyznaczać. Wiadomo, że $R(2) = 2$ (dwie osoby znają się bądź nie znają), pokazaliśmy też, że $R(3) = 6$, ale już wykazanie, że $R(4) = 18$, nie jest sprawą łatwą. Po pierwsze, musimy pokazać, że istnieje dwukolorowanie krawędzi grafu K_{17}, w którym unikniemy jednokolorowej kliki K_4. Okazuje się, że kolorowanie takie jest wyznaczone jednoznacznie (z dokładnością do permutacji wierzchołków), a otrzymujemy je w ten sposób, że wierzchołkom grafu przypisujemy liczby $\{0, 1, \ldots, 16\}$ z ciała $\mathbb{Z}_{17}$, krawędź zaś malujemy na czarno wtedy i tylko wtedy, gdy różnica liczb na jej końcach jest kwadratem w tym ciele. Wykazanie, że w grafie K_{18} takie kolorowanie jest niemożliwe, jest sprawą znacznie trudniejszą.

A ile wynosi $R(5)$? Otóż, zaskakujące jest, że dokładna wartość piątej liczby Ramseya nie jest dotąd znana, co na pierwszy rzut oka wydaje się nieprawdopodobne. Wiadomo tylko, że $43 \leqslant R(5) \leqslant 49$. Któż z nas teraz nie zakrzyknie: od czego mamy nowoczesne komputery?! Czy przebadanie kolorowań grafu pełnego na zaledwie 43 wierzchołkach może w dzisiejszych czasach stanowić jakąkolwiek trudność? Gdy jednak przyjrzymy się problemowi bliżej i dokonamy kilku obliczeń, sprawa staje się jasna. Zauważmy, że graf K_{43} ma $\binom{43}{2} = 903$ krawędzie, więc chcąc przeanalizować ich wszystkie możliwe dwukolorowania, musielibyśmy rozpatrzyć 2^{903} (czyli około 10^{271}) przypadków, a to już znacznie przekracza możliwości nawet najszybszych superkomputerów. Z kolejnymi liczbami Ramseya sprawa wygląda jeszcze gorzej: $102 \leqslant R(6) \leqslant 165$, $205 \leqslant R(7) \leqslant 540$, $282 \leqslant R(8) \leqslant 1870$. Naiwnością byłoby również sądzić, że mogą one się wyrażać jakimkolwiek jawnym wzorem.

Aby oddać skalę trudności problemu znajdowania liczb Ramseya, warto przypomnieć opowiastkę, którą często zwykł przytaczać Paul Erdős, a trudno chyba o większy autorytet w tej dziedzinie (opublikował on przeszło 100 prac dotyczących teorii Ramseya).

> *Wyobraźmy sobie, że wrogo nastawiona i znacznie potężniejsza militarnie obca cywilizacja napada na Ziemię i żąda od ludzi wyznaczenia dokładnej wartości liczby $R(5)$, gdyż w przeciwnym razie zniszczy planetę. Co powinniśmy zrobić, aby nie dopuścić do zagłady? Powinniśmy zmobilizować wszystkich matematyków, informatyków i programistów, zaprogramować wszystkie komputery na świecie i spróbować znaleźć żądaną wartość. A co, jeśli kosmici zażądają wyznaczenia liczby $R(6)$? Wówczas powinniśmy spróbować... zniszczyć najeźdźców.*

Musimy pogodzić się z tym, że, prawdopodobnie, nigdy nie dowiemy się, ile wynosi szósta, siódma i następne liczby Ramseya, co wcale nie znaczy, że ludzie zaprzestaną swych wysiłków w próbach ich wyznaczenia.

Grafy Ramseya w przestrzeni

W dotychczasowych rozważaniach grafy traktowaliśmy w sposób abstrakcyjny, czyli jako parę złożoną z pewnego skończonego zbioru V (wierzchołki) i z kolekcji jego dwuelementowych podzbiorów E (krawędzie), natomiast tradycyjny rysunek grafu na płaszczyźnie (punkty połączone liniami) służył nam jedynie do lepszej wizualizacji prezentowanych problemów, ale w żaden sposób nie wykorzystywaliśmy jego geometrycznych własności.

Ostatnim krokiem do poznania największej liczby na świecie będzie spojrzenie na twierdzenie Ramseya w sposób geometryczny. Będziemy rozważać grafy pełne, których wierzchołki będą umieszczone we wszystkich wierzchołkach wielowymiarowej kostki jednostkowej w przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru (na prostej będą to końce odcinka, na płaszczyźnie wierzchołki kwadratu, w przestrzeni trójwymiarowej wierzchołki sześcianu itd.). Ogólnie w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ będzie 2^n wierzchołków (a więc powstanie graf K_{2^n}) i będą nimi wszystkie punkty, których współrzędne tworzą ciąg zerojedynkowy.

Była już mowa, że $R(4) = 18$, a więc, jeśli krawędzie grafu pełnego, który ma co najmniej 18 wierzchołków, pomalujemy dwoma kolorami, to musi się pojawić jednokolorowa klika K_4. Jeżeli rozważać będziemy tylko kolorowania grafów pełnych związanych z kostkami jednostkowymi, to zauważymy, że w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ graf taki ma tylko 16 wierzchołków, a więc możemy jego krawędzie tak pokolorować, by uniknąć jednokolorowej kliki K_4, natomiast już w przestrzeni $\mathbb{R}^5$ w grafie na 32 wierzchołkach klika taka pojawi się w każdym dwukolorowaniu.

Zażądajmy dodatkowej własności: aby klika K_4 była nie tylko jednokolorowa, ale na dodatek, aby wszystkie jej wierzchołki leżały w jednej płaszczyźnie (nazywamy ją płaską). Możemy teraz postawić pytanie: jakiego wymiaru musi być kostka jednostkowa, aby w dowolnym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego z nią powiązanego zawsze pojawiła się **płaska i monochromatyczna** kopia kliki K_4? Zauważmy, że klasyczne twierdzenie Ramseya nie mówi nam nic o jakichkolwiek geometrycznych własnościach, a więc nie mamy żadnej pewności, iż powyższe pytanie ma w ogóle odpowiedź wyrażającą się skończoną liczbą.

W 1971 roku Ronald Graham i Bruce Rothschild opublikowali pracę, w której udowodnili twierdzenie bardzo głęboko uogólniające wiele dotychczasowych rezultatów typu ramseyowskiego. Twierdzenie Ramseya było tylko drobnym wnioskiem płynącym z ich ogólnych rozważań. Twierdzenie Grahama–Rothschilda dawało również pozytywną odpowiedź na postawione wcześniej pytanie. Mianowicie, istnieje taka liczba naturalna n, że w dowolnym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego powiązanego z n-wymiarową kostką jednostkową zawsze pojawi się płaska i jednokolorowa klika K_4. Oznaczmy najmniejsze n o tej własności przez $RG(1,2,2)$. Nadmiar parametrów w RG ma na celu pokazanie, że jest to w istocie szczególny (najmniejszy nietrywialny) przypadek ogólnego twierdzenia. Oznaczają one kolejno: 1 – kolorujemy obiekty jednowymiarowe (krawędzie), 2 – obiekt, który musi się pojawić, jest dwuwymiarowy (płaska klika K_4), 2 – używamy dwóch kolorów.

Nasuwa się naturalne pytanie, czy znana jest dokładna wartość $RG(1,2,2)$, a jeśli nie, to czy można ją jakoś sensownie oszacować. Ronald Graham pokusił się o wyliczenie konkretnej wartości jej górnego oszacowania, które wynikało bezpośrednio z dowodu ich głównego twierdzenia i zamieścił ten wynik w opublikowanej wspólnie z Rothschildem pracy. Jednak szerzej stał się on znany dopiero w 1977 roku, kiedy został opisany przez Martina Gardnera na łamach jego popularnej rubryki w *Scientific American*. Wiadomo więc, że $RG(1,2,2) \leqslant LG$, gdzie LG nazywana jest liczbą Grahama, lecz zanim poznamy jej wartość, konieczne będzie zapoznanie się ze specjalną notacją.

Notacja strzałkowa Knutha

Gdy na początku swojej edukacji poznajemy nowe działanie arytmetyczne, staramy się je zdefiniować za pomocą działań poznanych wcześniej. Mnożenie dwóch liczb naturalnych $m \cdot n$ definiuje się jako n-krotne dodawanie składnika m, z kolei potęgowanie m^n, jako n-krotne mnożenie czynnika m. Donald Knuth wpadł na pomysł, aby procedurę tę uogólnić, definiując kolejne działania jako wielokrotne złożenia poprzednich. Punktem wyjścia niech będzie zwykłe potęgowanie:

$$m \uparrow n = m^n = \underbrace{m \cdots m}_{n \text{ razy}},$$

które zapisujemy za pomocą pojedynczej strzałki (tak jak tradycyjny zapis używany w informatyce). Kolejne działania notować będziemy podobnie (zwiększając tylko liczbę strzałek) i definiować rekurencyjnie:

$$m \uparrow\uparrow n = \underbrace{m \uparrow m \uparrow \cdots \uparrow m}_{n \text{ razy}} = m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m}}}}},$$

$$m \uparrow\uparrow\uparrow n = \underbrace{m \uparrow\uparrow m \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow m}_{n \text{ razy}},$$

a w ogólności

$$m \overbrace{\uparrow\uparrow \cdots \uparrow}^{k} n = \underbrace{m \overbrace{\uparrow \cdots \uparrow}^{k-1} m \overbrace{\uparrow \cdots \uparrow}^{k-1} m \cdots m \overbrace{\uparrow \cdots \uparrow}^{k-1} m}_{n \text{ razy}}.$$

Ponieważ działania strzałkowe nie są łączne, to ustalamy dodatkowo, że w przypadku braku nawiasów wykonujemy je w kolejności od prawej do lewej (analogicznie jak przy wielokrotnym potęgowaniu). Aby nieco oswoić się z taką notacją, wykonajmy kilka prostych obliczeń. Łatwo zauważyć, że

$$2 \uparrow\uparrow \cdots \uparrow 2$$

jest zawsze równe 4, niezależnie od liczby strzałek, nietrudno też obliczyć, że

$$3 \uparrow 3 = 3^3 = 27.$$

Nieco dłuższe rachunki musimy wykonać, aby obliczyć

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow 3 \uparrow 3 = 3 \uparrow 27 = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987.$$

Jeśli liczba rzędu siedmiu bilionów nas nie przeraża, to spróbujmy obliczyć

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 7\,625\,597\,484\,987$$

i tu, niestety, nasza moc obliczeniowa staje się niewystarczająca, gdyż w kolejnym kroku musielibyśmy napisać przeszło siedem i pół biliona trójek przedzielonych pojedynczymi strzałkami, co w tradycyjnym zapisie oznacza wieżę potęgową o wysokości 7 625 597 484 987 zbudowaną z trójek. Oczywiście, trudna jest jakakolwiek próba wyobrażenia sobie wielkości tej liczby. Możemy chyba tylko czuć ją intuicyjnie, widząc jej zapis w postaci wieży potęgowej.

Liczba Grahama

Jeśli chcesz, Czytelniku, poznać wielkość liczby Grahama, musisz pójść krok dalej i spróbować ogarnąć (choć jest to prawdopodobnie niewykonalne) wielkość liczby $G_0 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$, a następnie wykonać krok drugi (który jest już chyba krokiem w otchłań nieskończoności) i poznać liczbę zdefiniowaną następująco:

$$G_1 = 3 \underbrace{\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow}_{G_0 \text{ strzałek}} 3.$$

Jeśli wykonaliśmy 2 kroki, to kolejne nie powinny już sprawić trudności. Niech

$$G_2 = 3 \underbrace{\uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow\uparrow}_{G_1 \text{ strzałek}} 3,$$

$$G_3 = 3 \underbrace{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}_{G_2 \text{ strzałek}} 3,$$

i tak dalej, aż po 64 krokach zatrzymamy się wreszcie, bo oto poznamy największą liczbę na świecie, czyli Liczbę Grahama:

$$RG(1,2,2) \leqslant LG = G_{63} = 3 \underbrace{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}_{G_{62} \text{ strzałek}} 3.$$

Na zakończenie warto odnotować pewną ciekawostkę. Liczba Grahama została zauważona również przez ludzi, którzy zawodowo zajmują się wszelkimi rekordowymi osiągnięciami, trafiła bowiem w 1997 roku do *Księgi Rekordów* Guinnessa i, prawdopodobnie, pozostanie tam jeszcze przez długie lata. Należy jeszcze dodać, że najlepszym znanym dziś dolnym oszacowaniem liczby $RG(1,2,2)$ jest 10, więc pierwszą możliwą jej dokładną wartością jest liczba 11.