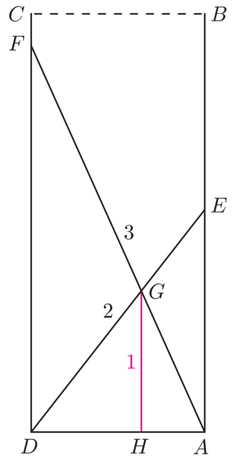


mmm z wizytą w *Delcie*

Tyczki zatopione w studni (1)

Katarzyna DYMARA

Oto stare zadanie (rzekomo wymyślone przez egipskich kapłanów) o dwóch tyczkach, które utknęły w studni, krzyżując się na ustalonej wysokości. Niewiele można w nim dokładnie obliczyć, ale nietrudno zauważyć różne nierówności. Zapraszamy do poszukania ich uzasadnień. Wystarczą do tego elementarne twierdzenia z geometrii gimnazjalnej, choć czasem można „pójść na łatwiznę” i odwołać się do znajomości trygonometrii.

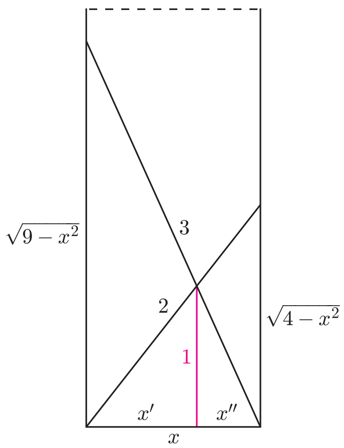
Dawno, dawno temu w starożytnym Egipcie do studni wpadł 2-metrowy drąg, a za nim 3-metrowy drąg. Skrzyżowały się na wysokości 1 m od dna studni. Porównaj podane liczby, długości odcinków i pola trójkątów, zastępując wielokropek znakiem równości, nierówności lub zapytania (jeśli na podstawie danych nie da się rozstrzygnąć, czy i jaka nierówność zachodzi).

1° $\lvert AG\rvert \ldots 1$	6° $\lvert FG\rvert \ldots 2$	11° $\lvert AE\rvert \ldots \lvert DF\rvert$	16° $\lvert BC\rvert \ldots \lvert DE\rvert$	21° $\lvert FG\rvert \ldots 2\lvert AG\rvert$	26° $\lvert AB\rvert \ldots 2\lvert AD\rvert$
2° $\lvert AG\rvert \ldots 2$	7° $\lvert AH\rvert \ldots 1$	12° $\lvert AG\rvert \ldots \lvert FG\rvert$	17° $\lvert CF\rvert \ldots \lvert GH\rvert$	22° $\lvert DG\rvert \ldots 2\lvert GE\rvert$	27° $P_{AGH} \ldots P_{DGH}$
3° $\lvert DG\rvert \ldots 1$	8° $\lvert AD\rvert \ldots 2$	13° $\lvert AG\rvert \ldots \lvert DG\rvert$	18° $\lvert AB\rvert \ldots \lvert AF\rvert$	23° $\lvert DH\rvert \ldots 2\lvert AH\rvert$	28° $P_{AGD} \ldots P_{DGF}$
4° $\lvert DG\rvert \ldots 2$	9° $\lvert AB\rvert \ldots 1$	14° $\lvert AE\rvert \ldots \lvert AH\rvert$	19° $\lvert AB\rvert \ldots \lvert CD\rvert$	24° $\lvert DF\rvert \ldots 2\lvert GH\rvert$	29° $P_{AEG} \ldots P_{AGH}$
5° $\lvert AE\rvert \ldots 1$	10° $\lvert BC\rvert \ldots 2$	15° $\lvert DG\rvert \ldots \lvert FG\rvert$	20° $\lvert DF\rvert \ldots \lvert DE\rvert$	25° $\lvert FG\rvert \ldots 2\lvert GH\rvert$	30° $P_{ADE} \ldots P_{ADF}$

Tyczki zatopione w studni (2)

Małgorzata MIKOŁAJCZYK

Zanim w XIX wieku odczytano poprawnie egipskie papirusy, powstało wiele błędnych interpretacji starożytnego pisma hieroglificznego. Nie wszystkie zapisy odszyfrowano precyzyjnie i tak powstały mity, czasem sprytnie wykorzystane przez kolejne pokolenia do własnych (niekoniecznie niecnych) celów. Oto stare zadanie (rzekomo wymyślone przez egipskich kapłanów) o dwóch tyczkach, które utknęły w studni, krzyżując się na ustalonej wysokości.



Dawno, dawno temu w starożytnym Egipcie do studni wpadł 2-metrowy drąg, a za nim 3-metrowy drąg. Skrzyżowały się na wysokości 1 m od dna studni. Jaka była szerokość tej studni?

Stosując twierdzenie Pitagorasa, obliczamy wysokości, na jakich opierają się obie tyczki. Dalej oznaczmy przez x' i x'' części odcinka x. Z podobieństwa trójkątów (jakich?) mamy:

$$\frac{x'}{1} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad \text{skąd} \quad x' = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$
$$\frac{x''}{1} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}, \quad \text{skąd} \quad x'' = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Wstawiając te wyniki do równości $x' + x'' = x$, otrzymujemy:

$$\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = x.$$

Jest to równanie z jedną niewiadomą x. Dzieląc obie strony przez x i przekształcając, dostajemy:

$$\sqrt{4-x^2} + \sqrt{9-x^2} = \sqrt{4-x^2} \cdot \sqrt{9-x^2}.$$

Podnosząc dwukrotnie do kwadratu i dalej przekształcając, otrzymamy ostatecznie:

$$x^8 - 22x^6 + 163x^4 - 454x^2 + 385 = 0,$$

czyli równanie stopnia ósmego, które łatwo można sprowadzić do równania stopnia czwartego (jak?). Wzory na rozwiązania takich równań odkryto dopiero w XVI wieku, a w XX wieku nauczono rozwiązywania takich równań komputery.

Oto rozwiązanie „wyprodukowane” programem Maple. Szukane x jest równe

$$\sqrt{\frac{11}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{37 + \frac{(43525+1200\sqrt{39})^{2/3}+1225}{\sqrt[3]{43525+1200\sqrt{39}}}} - \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{74 - \frac{(43525+1200\sqrt{39})^{2/3}+1225}{\sqrt[3]{43525+1200\sqrt{39}}} + \frac{144/\sqrt{3}}{37 + \frac{(43525+1200\sqrt{39})^{2/3}+1225}{\sqrt[3]{43525+1200\sqrt{39}}}}}},$$

co w przybliżeniu daje $x \approx 1{,}2311857\ldots$ (odradzamy sprawdzanie na kalkulatorze :).

Najdziwniejsza w tym zadaniu nie jest jednak odpowiedź, ale… kuriozalne pytanie. Wszak budowniczowie piramid, znani ze zdroworozsądkowego wykorzystania geometrii do praktycznych problemów, z łatwością zmierzyliby szerokość studni bez wrzucania do niej tyczek i wyznaczania odległości miejsca ich zetknięcia od dna.

Mamy tu zatem klasyczny przykład mitu. Prawdopodobnie zadanie to powstało dużo później, sformułowane przez odkrywców wzorów na rozwiązania równań stopnia czwartego. Wymyślili oni opowieść o studni egipskiej, by rozpropagować swój wynik i pokazać użyteczność podanych wzorów. Ot, taki chwyt reklamowy.