Informatyczny kącik olimpijski (16)

Zajmijmy się kolejnym zadaniem z Międzynarodowej Olimpiady Informatycznej, tym razem – Egipt 2008. Oto jego treść:

Mamy zbudować ogród – długą rabatkę złożoną z kwiatów lotosu (`L`) oraz „papirusu” (`P`). (Jak wszyscy wiemy, chodzi konkretnie o ciborę papirusową, z której wyrabiano papirus.) Dla naszych potrzeb ogród będziemy opisywać ciągiem liter `L` i `P`. Ogród ma być ładny, co w tym wypadku oznacza, że w żadnym jego podsłowie (czyli spójnym fragmencie) liczby lotosów i papirusów nie mogą się różnić o więcej niż 2. Istnieje wiele takich możliwych ogrodów. Naszym zadaniem jest, mając podany ogród, obliczenie, na jakiej pozycji (modulo M) taki ogród by się znalazł, gdybyśmy wszystkie ogrody o tej samej długości posortowali alfabetycznie.

Zastanówmy się najpierw, co to znaczy, że liczba lotosów i papirusów nie różni się o więcej niż dwa w żadnym podsłowie ogrodu. Możemy, na przykład, oznaczyć literę `L` przez 1, a `P` – przez -1. Wtedy suma liczb w żadnym podsłowie nie może być mniejsza niż -2 ani większa niż 2. Gdyby budować ogród zgodnie z taką regułą, to byłoby to uciążliwe – z każdą kolejną dostawioną literą musielibyśmy sprawdzać każde możliwe podsłowo kończące się na niej.

Jednym z podsłów jest cały ogród – suma liczb w całym ogrodzie też musi być w przedziale $[-2, 2]$. Dalej, jeśli oznaczymy przez S_i sumę liczb od początku ogrodu do pozycji i, to otrzymujemy warunek: $|S_i - S_j| \leqslant 2$. A więc, jeśli któreś S_i jest równe 2, to żadne inne nie może być ujemne. Podobnie, jeśli któreś S_i wynosi -2, to żadne inne nie może być dodatnie. Jest jeszcze trzeci przypadek – wszystkie S_i są w przedziale $[-1, 1]$.

W ten sposób uprościliśmy warunek „ładności” do dwóch przypadków do rozpatrzenia (przypadki z 2 i z -2 możemy traktować jednakowo – są symetryczne).

Wybierzmy przypadek z 2 i załóżmy, że istnieje a_0 ogrodów o jakiejś ustalonej długości i takich, że $S_i = 0$ – podobnie wprowadźmy oznaczenia a_1 i a_2. Niech b_0, b_1, b_2 będą liczbami ogrodów o jedną roślinę dłuższych, a c_0, c_1, c_2 – o dwie.

Ile jest ogrodów o długości $i+1$ takich, że $S_{i+1} = 0$? S_i nie może być równe -1, a więc w tym przypadku musiałoby być równe 1. W takim razie $b_0 = a_1$. Podobnie dochodzimy do wniosku, że $b_2 = a_1$, a $b_1 = a_0 + a_2$. Następny krok: $c_0 = b_1 = a_0 + a_2$, $c_1 = b_0 + b_2 = 2a_1$, a $c_2 = b_1 = a_0 + a_2$. Ale w takim razie $c_0 + c_1 + c_2 = 2(a_0 + a_1 + a_2)$! A więc ogrodów o długości $i+2$ jest dwa razy więcej niż ogrodów o długości i. Czytelnik łatwo może sprawdzić, że jest to prawdą też w przypadku, gdy S_i mają pozostawać w przedziale $[-1, 1]$ oraz $[-2, 0]$. Równie łatwo można sprawdzić, że:

- Jeśli S_i mają pozostawać w przedziale $[-2, 0]$ lub $[0, 2]$, to ogrodów o długości i jest $2^{\lfloor i/2 \rfloor}$.
- A jeśli S_i mają pozostawać w przedziale $[-1, 1]$, to ogrodów o długości i jest $2^{\lfloor (i+1)/2 \rfloor}$.

Jak to się ma do naszego problemu?

Spójrzmy na kolejne rośliny w naszym ogrodzie. Litera `L` jest wcześniej w alfabecie – zignorujmy więc jej wystąpienia. Z kolei kiedy natrafiamy na `P` na pozycji k, to prawdopodobnie istnieje ileś ogrodów, które pokrywały się z naszym aż do tej pozycji, ale na tej właśnie pozycji mają `L`, a więc są wcześniej w alfabecie. Dodajmy więc liczbę tych ogrodów do liczby wszystkich ogrodów, które są wcześniej w alfabecie, niż nasz.

Mamy więc pewien początkowy fragment ogrodu o długości k; chcielibyśmy wiedzieć, ile jest ogrodów w ten sposób się zaczynających. Załóżmy, że liczba S_i w dotychczasowej części nigdy nie była ujemna, a S_k wynosi 1. W takiej sytuacji ten ogród możemy dokończyć dowolnym ogrodem, który ma S_i (licząc od pozycji $k+1$-szej) w przedziale $[-1, 1]$. Gdyby S_k było równe 0 (w tym przypadku akurat – niemożliwe (dlaczego?)) lub 2, to moglibyśmy dokończyć – odpowiednio – ogrodem o S_i w przedziale $[0, 2]$ lub $[-2, 0]$.

Analogicznie sytuacja ma się w pozostałych przypadkach – tj. gdy S_i do pozycji k zawiera się w $[-1, 1]$ lub $[-2, 0]$. Ale co jeśli zawiera się w kilku z nich? Zauważmy, że dla ogrodów o dodatniej długości mogą to być tylko przypadki $[-1, 1]$ i $[-2, 0]$ lub $[-1, 1]$ i $[0, 2]$. Wtedy – zgodnie z zasadą włączeń i wyłączeń – interesująca nas liczba ogrodów to suma liczb ogrodów z poszczególnych przypadków, minus te ogrody, które zawierają się w $[-1, 0]$ lub odpowiednio w $[0, 1]$ (ponieważ policzyliśmy je dwukrotnie). Obu jest po jednym: `PLPLPLPL...` oraz `LPLPLPLP...`

W takim razie rozwiązanie tego zadania wymaga tylko tyle pamięci, ile potrzeba, żeby spamiętać potęgi 2 modulo M.

Ciekawostka – gdybyśmy mieli zapewnione, że M jest pierwsze, to moglibyśmy to zadanie rozwiązać w stałej pamięci. Ciąg należałoby wtedy wczytywać na bieżąco, a co do potęg 2 – najpierw obliczylibyśmy największą, a potem dzielili ją przez 2 modulo M (rozszerzony algorytm Euklidesa). Niestety, byłoby to jednocześnie nieco wolniejsze rozwiązanie.

Filip WOLSKI