Graficzna interpretacja sum ciągów arytmetycznych

Gustaw SIERZPUTOWSKI[*]

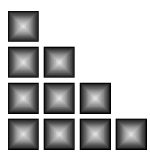
[*]uczeń, I LO w Bydgoszczy

Pomysł na tę pracę powstał całkowicie przypadkowo, gdy otrzymałem zadanie obliczenia sumy kolejnych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego drugiego stopnia. Ponieważ zagadnienie to wybiegało poza zakres liceum i definicje ciągów arytmetycznych stopni wyższych niż jeden nie były mi znane, postanowiłem poszukać własnej metody dojścia do rozwiązania...

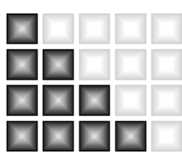
Na początek, jako wprowadzenie do metody, przedstawimy graficzny sposób otrzymania wzoru na sumę kolejnych wyrazów dowolnego ciągu arytmetycznego. Zapiszmy ją od razu w następujący sposób:

$$n \text{ wyrazów} \begin{cases} a_1 + \\ a_1 + r + \\ a_1 + r + r + \\ a_1 + r + r + r + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1 + \underbrace{r + r + r + \ldots + (n-1)r}_{n-1 \text{ wyrazów}} \end{cases}$$

Zastąpmy teraz każdą z różnic r kwadratowym klockiem. Dla $n = 5$ będzie to



Przedstawiony zespół klocków może kojarzyć się nam z trójkątem. Po połączeniu go z drugą taką samą figurą otrzymamy prostokąt o polu $(n-1) \cdot n$, które podzielone przez 2 daje nam początkowo szukaną liczbę różnic



Potrafimy już zatem zapisać wzór na sumę kolejnych wyrazów dowolnego ciągu arytmetycznego pierwszego stopnia:

$$S_n^{(1)} = n \cdot a_1 + r \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Zdefiniujmy teraz następujący ciąg:

$$c_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n.$$

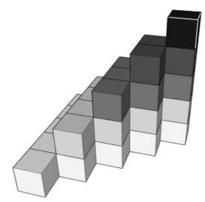
Suma pierwszych n wyrazów tego ciągu to

$$S_n = n + (n-1)2 + (n-2)3 + \ldots + \\ + 3(n-2) + 2(n-1) + n,$$

co widać, gdy rozpiszemy ją tak, aby każdy wyraz znalazł się w osobnej kolumnie

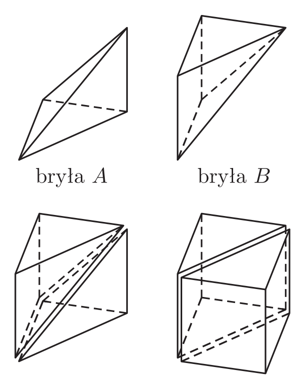
$$n \text{ wyrazów} \begin{cases} 1 + \\ 1 + 2 + \\ 1 + 2 + 3 + \\ 1 + 2 + 3 + 4 + \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n}_{n \text{ wyrazów}} \end{cases}$$

Przedstawmy teraz tę sumę w postaci bryły utworzonej z jednakowej wielkości sześciennych klocków (na rysunku dla $n = 5$).



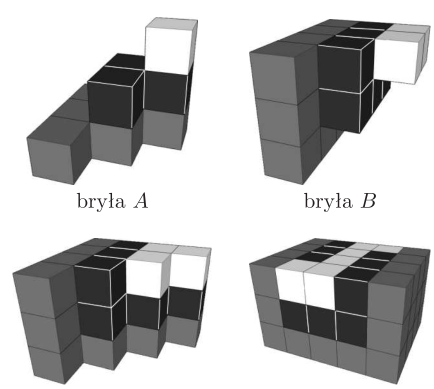
Konstrukcja ta, którą nazwiemy „A", może przypominać nam ostrosłup. Możemy domyślać się więc istnienia bryły B o dwukrotnie większej objętości (a więc i liczbie klocków), takiej, że jeśli połączymy obie te konstrukcje, to otrzymamy bryłę C przypominającą wyglądem graniastosłup prawidłowy trójkątny.
Po połączeniu dwóch konstrukcji C otrzymamy natomiast prostopadłościan, będący odpowiednikiem otrzymanego w poprzednim przypadku prostokąta.

Tak mniej więcej będą wyglądały dane bryły, gdy weźmiemy na tyle duże n, aby przestać zauważać krawędzie klocków.



bryła A bryła B bryła C bryła D

A tak, gdy $n = 3$:



bryła A bryła B bryła C bryła D

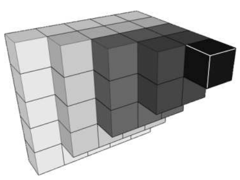
Widzimy więc, że w bryle D znajduje się dokładnie $n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ sześciennych klocków. Oczywiste jest też, że $V_D = 2 \cdot V_C = 2 \cdot (V_A + V_B) = 6 \cdot V_A$. Możemy już zatem napisać wzór na sumę kolejnych wyrazów omawianego ciągu:

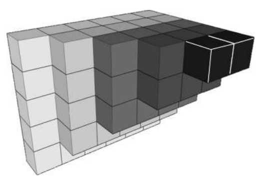
$$S_n = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

Przejdźmy teraz do sumy kwadratów kolejnych liczb naturalnych. Przedstawmy ją od razu w sposób analogiczny do poprzednich.

$$n \text{ wyrazów} \left\{ \begin{array}{l} 1\,+ \\ 2+2\,+ \\ 3+3+3\,+ \\ 4+4+4+4\,+ \\ 5+5+5+5+5\,+ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{n+n+n+n+n+\ldots+n}_{n \text{ wyrazów}} \end{array} \right.$$

Bardzo łatwo zauważyć podobieństwo trójwymiarowej interpretacji tej sumy do otrzymanej w poprzednim przykładzie bryły B (dla $n = 5$).

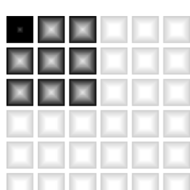

omawiana suma


bryła B

Od razu możemy zauważyć, że po odjęciu „omawianej sumy" od sumy przedstawianej przez bryłę B otrzymamy sumę n kolejnych liczb naturalnych. Możemy więc bez problemu otrzymać wzór na sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych:

$$S_n^{(2)} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3} - \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \\ = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Gdy przedstawimy na płaszczyźnie n kolejnych składników sumy sześcianów liczb naturalnych, zauważymy, że zawsze można ułożyć z nich kwadrat o boku długości równej sumie n kolejnych liczb naturalnych.

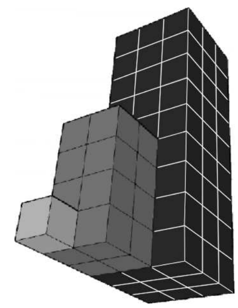


Otrzymujemy więc wzór na sumę:

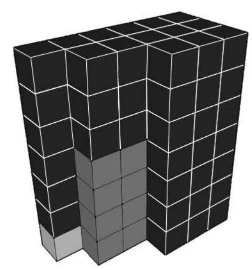
$$S_n^{(3)} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Rozważmy teraz sumę czwartych potęg kolejnych liczb naturalnych. Utwórzmy graficzną postać sumy $1^4 + 2^4 + 3^4$ ułożonej w taki sposób, że w podstawie każdego z jej składników będzie kwadrat $n \times n$, natomiast wysokością będzie n^2.

Połączmy takie prostopadłościany w sposób pokazany na rysunku.



Widzimy, że podstawa powstałej konstrukcji jest rozpisaną na płaszczyźnie sumą kwadratów kolejnych liczb naturalnych. Aby policzyć liczbę klocków budujących daną bryłę, należy przestawić je tak, by wyrównać wysokości kolumn, a następnie zmierzyć wysokość powstałej bryły.



Na podstawie dotychczasowych przykładów możemy także przypuszczać, że wzór na sumę k-tych potęg kolejnych liczb naturalnych jest wielomianem $k+1$ stopnia. Spodziewamy się zatem wzoru na sumę o postaci:

$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}(an^2 + bn + c).$$

Widzimy więc, że wysokość naszej bryły jest trójmianem kwadratowym. Możemy przypuszczać, że aby obliczyć jego współczynniki, należy za n podstawić trzy różne liczby naturalne i rozwiązać układ trzech równań (oczywiście, najprościej za n podstawić 1, 2 i 3).
Po krótkich rachunkach otrzymujemy wzór na sumę czwartych potęg kolejnych liczb naturalnych. Warto dodać, że wysokość rozpatrywanej bryły nie dla każdego n będzie liczbą naturalną, czyli w rzeczywistości nie zawsze da się przestawić klocki, wyrównując kolumny, jak dla $n = 3$

$$S_n^{(4)} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)}{30}.$$

Okazuje się, że metoda, którą otrzymaliśmy wzór na sumę czwartych potęg kolejnych liczb naturalnych, działa także dla wyższych potęg. Dzięki temu spostrzeżeniu możemy utworzyć następujący wzór rekurencyjny, w którym współczynniki trójmianu obliczamy, podstawiając wartości sumy dla małych n:

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k = \\ = (1^{k-2} + 2^{k-2} + \ldots + n^{k-2})(an^2 + bn + c),$$

gdzie $k \geqslant 2$.

Na zakończenie przedstawimy graficzną postać sumy kolejnych wyrazów dowolnego ciągu arytmetycznego II stopnia. Ponieważ jest to ciąg mało popularny, zaczniemy od jego definicji.

Ciągiem arytmetycznym drugiego stopnia nazywamy ciąg (a_n)*, w którym różnica* $(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)$ *jest stała dla dowolnego* $n\in\mathbb{N}$*. Oznacza to, że ciąg*

$$(a_2-a_1),(a_3-a_2),\ldots,(a_n-a_{n-1}),\ldots$$

jest ciągiem arytmetycznym (pierwszego stopnia).

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$a_2-a_1=r_1,\qquad (a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=r_2.$$

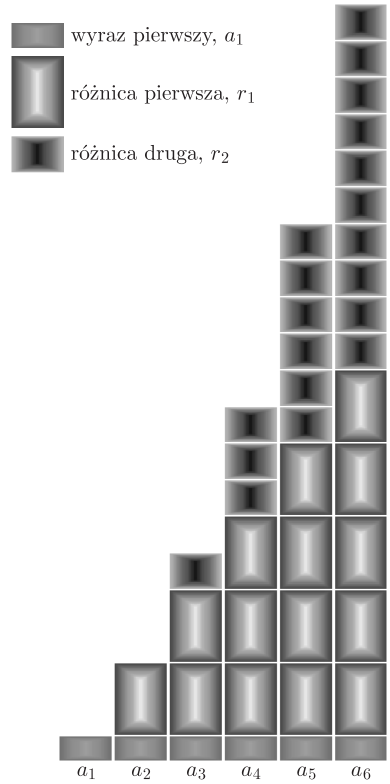
Opierając się na wcześniej otrzymanych wzorach, możemy bez problemu wyprowadzić wzór na sumę:

$$S_n^{(2')}=a_1\cdot n+r_1\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+r_2\cdot\frac{(n-2)(n-1)\cdot n}{6}.$$

Łatwo zauważyć, że przedstawione w tym artykule sposoby dojścia do wzorów nie są same w sobie dowodami. Można je jednak udowodnić (na przykład przez indukcję), co pozostawiam Czytelnikom.

Bibliografia

1. H. Pawłowski, *Matematyka 2, Podręcznik, Zakres rozszerzony*, Operon, Gdynia 2003.
2. M. Adamczak, *Ciągi arytmetyczne drugiego stopnia*, Matematyka 9 (325), str. 554–557.



Tak może wyglądać pierwsze sześć wyrazów ciągu arytmetycznego II stopnia.

VI Międzynarodowa Olimpiada Lingwistyki Teoretycznej, Matematycznej i Stosowanej

Zawody odbyły się w sierpniu 2008 roku w Słonecznym Brzegu w Bułgarii. Startowało w nich 67 uczniów tworzących 16 drużyn narodowych.

W części indywidualnej zawodnicy mieli do rozwiązania 5 zadań w ciągu 6 godzin, a w części drużynowej – jedno zadanie w ciągu 4 godzin. Polacy wywalczyli 5 z przyznanych 20 medali – trzy srebrne (Maciej Janicki z III LO we Wrocławiu, Łukasz Cegieła z XIV LO we Wrocławiu, Marcin Filar z V LO w Krakowie) i dwa brązowe (Radosław Burny z LO im. Małachowskiego w Płocku i Karol Konaszyński z XIV LO we Wrocławiu), a średnia ich wyników indywidualnych dała im drugie miejsce za reprezentacją USA.

W części drużynowej reprezentacja Polski zajęła V miejsce. Dodatkowo Radosław Burny z Płocka zdobył jedną z sześciu nagród przyznanych za najlepsze rozwiązania poszczególnych zadań. Pod względem liczby zdobytych nagród Polska została pokonana tylko przez reprezentację Stanów Zjednoczonych.

* * *

Zapraszamy do udziału w tegorocznej edycji tej olimpiady. Więcej informacji można znaleźć na stronie internetowej `http://www.fsmw.uni.wroc.pl/lingw/`.

Poniżej prezentujemy wybrane zadania z zawodów indywidualnych.

Zadanie 1 (20 punktów). Podane są wyrazy w języku mikmackim, zapisane w tzw. ortografii Listuguj oraz w transkrypcji fonetycznej, a także ich tłumaczenia na polski:
tmi’gn – [dəmīgən] – siekiera; an’stawteg – [anəstawtek] – niebezpieczny; gjiansale’wit – [əkciansalēwit] – archanioł; mgumie’jo’tlatl – [əmkumiējōdəladəl] – podkuć; amqwanji’j – [amx$^{\mathrm{w}}$ancīc] – łyżka; e’jnt – [ējənt] – agent do spraw Indian; tplutaqan – [ətpəludaɣan] – ustawa; g’p’ta’q – [gəbədāx] – na górze; ge’gwising – [gēg$^{\mathrm{w}}$isink] – leżeć na górze; lnu’sgw – [lənūsk$^{\mathrm{w}}$] – Indianka; epsaqtejg – [epsaxteck] – piec (*rzeczownik*).

(a) Zapisz wyrazy w transkrypcji fonetycznej: gsnqo’qon – głupota; tg’poq – woda źródlana; gmu’jmin – malina; emtoqwatg – uwielbiać; te’plj – koza.

(b) Zapisz w ortografii Listuguj: [ətpədēsən] – południe; [əmteskəm] – wąż; [alaptək] – oglądać się; [gəlamen] – dlatego.

NB: Język mikmacki należy do algonkińskiej rodziny języków. Mówi nim około 8000 osób w Kanadzie.
W transkrypcji [ə] ≈ *y* w *pierwszy*, [c] ≈ *cz* w *czas*, [j] ≈ *dż* w *dżem*, [x] ≈ *ch* w *chór*, [ɣ] jest dźwięcznym odpowiednikiem ostatniego, [$^{\mathrm{w}}$] oznacza, że poprzednia spółgłoska jest wymawiana z zaokrągleniem warg. Znak ¯ oznacza długość samogłoski.

Bożydar BOŻANOW