

# Uwagi do artykułu J. Szejki „Ciąg, który lubi nierówności”

Andrzej PASZKIEWICZ\*, Andrzej SCHINZEL\*\*

**1. Opis problemu i niektóre wyniki dotyczące jego rozwiązania.** J. Szejko w swoim artykule (*Delta* 3 (394), 2007) zajmował się ciągiem  $a_k$ , zdefiniowanym jak następuje:

$$a_1 = 1, \quad a_k = \sum_{\substack{l < k \\ (k,l)=1}} a_l.$$

Centralny nierozwiązany problem dotyczy istnienia granicy  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$ . Problemu tego nie umiemy rozwiązać, ale podane niżej dwa twierdzenia sugerują, że granica istnieje. Niech  $f(n, k, P)$ , gdzie  $P$  jest liczbą naturalną (względnie  $f(n, k)$ ), będzie liczbą ciągów rosnących liczb całkowitych  $c_0 < c_1 < \dots < c_m$ , takich, że  $c_0 = n$ ,  $c_m = n + k$  i odpowiednio  $(c_i, c_{i+1}, P) = 1$  (względnie  $(c_i, c_{i+1}) = 1$ ) dla wszystkich  $i < m$ .

Symbol  $(k_1, \dots, k_m)$  oznacza największy wspólny dzielnik liczb  $k_1, \dots, k_m$ .

Jeżeli  $P$  dzieli się przez iloczyn wszystkich liczb pierwszych nie większych od  $k$ , oznaczany  $P_k$ , warunki  $(c_i, c_{i+1}, P) = 1$  i  $(c_i, c_{i+1}) = 1$  są równoważne, zatem

$$(1) \quad f(n, k, P) = f(n, k) \quad \text{dla } P_k | P, \text{ gdzie } P_1 = 1.$$

**Lemat 1.** Dla wszystkich liczb całkowitych  $n$  i liczb naturalnych  $k, P$  mamy

$$(2) \quad f(n, k, P) = \sum_{\substack{0 < l < k \\ (n+l, n+k, P)=1}} f(n, l, P) + \begin{cases} 1 & \text{dla } (n, k, P) = 1, \\ 0 & \text{dla } (n, k, P) > 1. \end{cases}$$

**Dowód.** Mamy

$$\begin{aligned} & \{ \langle c_0, \dots, c_m \rangle : \\ & n = c_0 < c_1 < \dots < c_m = n + k, (c_i, c_{i+1}, P) = 1 \} = \\ & = \bigcup_{\substack{0 < l < k \\ (n+l, n+k, P)=1}} \{ \langle c_0, \dots, c_m \rangle : \\ & \quad n = c_0 < c_1 < \dots < c_{m-1} = n + l, \\ & \quad c_m = n + k, (c_i, c_{i+1}, P) = 1 \} \cup \\ & \cup \begin{cases} \{ \langle n, n + k \rangle \} & \text{dla } (n, k, P) = 1, \\ \emptyset & \text{dla } (n, k, P) > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

**Wniosek 1.**

$$f(n, k) = \sum_{\substack{0 < l < k \\ (n+l, n+k)=1}} f(n, l) + \begin{cases} 1 & \text{dla } (n, k) = 1, \\ 0 & \text{dla } (n, k) > 1. \end{cases}$$

**Dowód.** Wystarczy połączyć wzory (1) i (2).

**Wniosek 2.**  $a_k = f(0, k)$ .

**Dowód.** Na mocy Wniosku 1 ciąg  $f(0, k)$  spełnia ten sam wzór rekurencyjny co  $a_k$ .

Niech  $b_k = \min_n f(n, k)$ . Ponieważ  $f(n, k) \leq 2^{k-1}$  (liczba ciągów rosnących liczb całkowitych o początku  $n$  i końcu  $n + k$ ), mamy  $\sup \sqrt[k]{b_k} \leq 2$ . Udowodnimy

**Twierdzenie 1.**  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{b_k} = \sup \sqrt[k]{b_k}$ .

**Twierdzenie 2.**  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} \geq \sqrt[11]{233} > 1,64139$ ,  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} \leq \sqrt[6]{34} < 1,79989$ .

**Dowód Twierdzenia 1.** Niech  $\sup \sqrt[k]{b_k} = s$  i niech będzie dane  $\varepsilon > 0$ . Z definicji supremum istnieje takie  $l$ , że

$$\sqrt[l]{b_l} > s \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Weźmy teraz  $k$  tak duże, żeby

$$s^{l/k} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Składając razem odpowiednie ciągi, otrzymujemy, że

$$f(n, l_1 + l_2) \geq f(n, l_1) f(n + l_1, l_2),$$

zatem

$$b_{l_1+l_2} \geq b_{l_1} b_{l_2}.$$

Stąd, jeżeli

$$k = lq + r, \quad 0 \leq r < l,$$

otrzymujemy

$$b_k \geq b_l^q;$$

zatem

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{b_k} & \geq b_l^{q/(lq+r)} \geq s^{lq/(lq+r)} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^{lq/(lq+r)} > \\ & > s^{1-l/k} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) > \frac{s(1 - \varepsilon/2)}{1 + \varepsilon/2} > s(1 - \varepsilon). \end{aligned}$$

Z drugiej strony oczywiście  $\sqrt[k]{b_k} \leq s$ , co dowodzi twierdzenia.

Aby dowieść istnienia granicy  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$ , wystarczyłoby więc wykazać

**Przypuszczenie.**  $b_k = a_k$ .

Skromny krok w tym kierunku stanowi

**Lemat 2.**  $b_{11} = a_{11}$ .

**Dowód.** Na mocy wzoru (1),

$$b_{11} = \min_n f(n, 11, P_{11})$$

i oczywiście

$$(3) \quad f(n, 11, P_{11}) = f(n, 11, P_7) - \begin{cases} 1 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{11}, \\ 0 & \text{dla } n \not\equiv 0 \pmod{11}, \end{cases}$$

a ponadto

$$(4) \quad f(n, 11, 30) - f(n, 11, P_7) = \begin{cases} f(n+7, 4) & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{7}, \\ 0 & \text{dla } n \equiv 1, 2 \pmod{7}, \\ f(n, 4) & \text{dla } n \equiv 3 \pmod{7}, \\ f(n, 3) & \text{dla } n \equiv 4 \pmod{7}, \\ 2 & \text{dla } n \equiv 5 \pmod{7}, \\ f(n+8, 3) & \text{dla } n \equiv 6 \pmod{7}. \end{cases}$$

Pozostaje obliczyć  $f(n, 11, 30)$ . Ale oczywiście

$$\begin{aligned} f(n+30, 11, 30) & = f(n, 11, 30), \\ f(-n-11, 11, 30) & = f(n, 11, 30), \end{aligned}$$

\*Instytut Telekomunikacji Politechniki Warszawskiej

\*\*Instytut Matematyczny PAN

zatem

$$\{f(n, 11, 30) : n \in Z\} = \{f(n, 11, 30) : -5 \leq n \leq 9\}.$$

Stosując wzór (2) jako wartości  $f(n, 11, 30)$  dla  $n = -5, \dots, 9$ , otrzymujemy kolejno: 250, 300, 293, 293, 276, 241, 266, 297, 291, 277, 284, 264, 264, 300, 273, zatem

$$f(n, 11, 30) \geq 241,$$

a ponieważ  $f(n, 4) \leq 7$  (bo co najmniej jeden z ciągów  $\langle n, n+4 \rangle$  i  $\langle n, n+1, n+3, n+4 \rangle$  nie spełnia warunku  $(c_i, c_{i+1}) = 1$ ) z wzorów (1), (3) i (4) dostajemy

$$f(n, 11) = f(n, 11, P_{11}) \geq 241 - 7 - 1 \geq 233 = a_{11}.$$

Stąd  $b_{11} = a_{11}$ .

**Lemat 3.** Wielomian  $W(x) = x^4 - 36x^3 + 69x^2 - 32x + 4$  ma dokładnie jeden pierwiastek  $y$  w przedziale  $(33, 34)$ .

*Dowód.* Mamy  $W(33) < 0$ ,  $W(34) > 0$ , a ponadto w przedziale  $(33, 34)$  funkcja  $W(x)$  jest monotoniczna, bowiem

$$\begin{aligned} W'(x) &= 4x^3 - 108x^2 + 138x - 32 \geq \\ &\geq 4 \cdot 33^3 - 108 \cdot 34^2 + 138 \cdot 33 - 32 > 0. \end{aligned}$$

**Lemat 4.** Liczby

$$B_1 = y^4 - 15y^3 + 41y^2 - 41y + 16 - 2y^{-1},$$

$$B_2 = y^4 - 5y^3 + 9y^2 - 7y + 2,$$

$$B_3 = 2y^4 - 3y^3 + 10y^2 - 4y,$$

$$B_4 = 3y^4 - 13y^3 + 19y^2 - 15y + 3,$$

$$B_5 = 7y^4 - 19y^3 + 15y^2 - 3y,$$

$$B_6 = 8y^4 - 26y^3 + 30y^2 - 14y + 2,$$

są dodatnie i spełniają układ równań

$$(5) \quad \begin{cases} (2-y)B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 = 0, \\ yB_1 + (1-y)B_2 + B_3 + B_5 = 0, \\ yB_1 + yB_2 + (1-y)B_3 + B_4 + B_5 = 0, \\ yB_1 + yB_3 + (1-y)B_4 + B_5 = 0, \\ yB_1 + yB_2 + yB_3 + yB_4 + (2-y)B_5 + B_6 = 0, \\ yB_1 + yB_5 + (1-y)B_6 = 0. \end{cases}$$

Dowód przez sprawdzenie.

*Dowód Twierdzenia 2.* Z nierówności  $a_k \geq b_k$ , z Twierdzenia 1 i Lematu 2 wnosimy, że

$$\begin{aligned} \liminf k\sqrt[k]{a_k} &\geq \lim k\sqrt[k]{b_k} = \sup k\sqrt[k]{b_k} \geq \\ &\geq \sqrt[11]{b_{11}} = \sqrt[11]{a_{11}} = \sqrt[11]{233}, \end{aligned}$$

co dowodzi pierwszej części twierdzenia. Aby dowieść drugiej części, wykażemy przez indukcję, że

$$(6) \quad a_{6q+r} \leq B_r y^{q+1} \quad (1 \leq r \leq 6).$$

Dla  $q = 0$ ,  $r = 1$ , nierówność jest prawdziwa wobec  $B_1 > 1$ ,  $y > 1$ . Załóżmy teraz, że nierówność (6) jest prawdziwa dla wszystkich wskaźników mniejszych niż  $6q + r$ . Wówczas na mocy założenia indukcyjnego i wzorów (5) mamy:

dla  $r = 1$ :

$$\begin{aligned} a_{6q+1} &\leq a_{6q} + \dots + a_1 \leq \\ &\leq (B_1 + \dots + B_6)(y^q + \dots + y) < \\ &< (B_1 + \dots + B_6) \frac{y^{q+1}}{y-1} = B_1 y^{q+1}, \end{aligned}$$

dla  $r = 2$ :

$$\begin{aligned} a_{6q+2} &\leq a_{6q+1} + a_{6q-1} + a_{6q-3} + a_{6q-5} + \dots \leq \\ &\leq B_1(y^{q+1} + \dots + y) + \\ &\quad + (B_3 + B_5)(y^q + \dots + y) < \\ &< B_1 \frac{y^{q+2}}{y-1} + (B_3 + B_5) \frac{y^{q+1}}{y-1} = B_2 y^{q+1}, \end{aligned}$$

dla  $r = 3$ :

$$\begin{aligned} a_{6q+3} &\leq a_{6q+2} + a_{6q+1} + a_{6q-1} + a_{6q-2} + \dots \leq \\ &\leq (B_1 + B_2)(y^{q+1} + \dots + y) + \\ &\quad + (B_4 + B_5)(y^q + \dots + y) < \\ &< (B_1 + B_2) \frac{y^{q+2}}{y-1} + (B_4 + B_5) \frac{y^{q+1}}{y-1} = B_3 y^{q+1}, \end{aligned}$$

dla  $r = 4$ :

$$\begin{aligned} a_{6q+4} &\leq a_{6q+3} + a_{6q+1} + a_{6q-1} + a_{6q-3} + \dots \leq \\ &\leq (B_1 + B_3)(y^{q+1} + \dots + y) + \\ &\quad + B_5(y^q + \dots + y) < \\ &< (B_1 + B_3) \frac{y^{q+2}}{y-1} + B_5 \frac{y^{q+1}}{y-1} = B_4 y^{q+1}, \end{aligned}$$

dla  $r = 5$ :

$$\begin{aligned} a_{6q+5} &\leq a_{6q+4} + \dots + a_1 \leq \\ &\leq (B_1 + \dots + B_4)(y^{q+1} + \dots + y) + \\ &\quad + (B_5 + B_6)(y^q + \dots + y) < \\ &< (B_1 + \dots + B_4) \frac{y^{q+2}}{y-1} + (B_5 + B_6) \frac{y^{q+1}}{y-1} = \\ &= B_5 y^{q+1}, \end{aligned}$$

dla  $r = 6$ :

$$\begin{aligned} a_{6q+6} &\leq a_{6q+5} + a_{6q+1} + a_{6q-1} + a_{6q-5} + \dots \leq \\ &\leq (B_1 + B_5)(y^{q+1} + \dots + y) < \\ &< (B_1 + B_5) \frac{y^{q+2}}{y-1} = B_6 y^{q+1}. \end{aligned}$$

Zatem nierówność (6) zachodzi ogólnie i mamy

$$a_{6q+r}^{1/(6q+r)} \leq B_r^{1/6q+r} y^{(q+1)/(6q+r)},$$

skąd

$$\limsup k\sqrt[k]{a_k} \leq y^{1/6} \leq \sqrt[6]{34}.$$

## 2. Obliczenia komputerowe i uzyskane wyniki.

Aby udowodnić, że

$$\liminf k\sqrt[k]{a_k} > 1,7003,$$

wystarczy dowieść, że  $b_{19} = a_{19}$ . W tym celu trzeba wyliczyć, posługując się wzorem (2),  $f(n, 19, 210)$  dla  $n = -9, -8, \dots, 95$ , a następnie skorzystać ze wzorów

$$(7) \quad f(n, 19, 210) - f(n, 19, P_{11}) =$$

$$= \begin{cases} f(n+11, 8) & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{11}, \\ 0 & \text{dla } n \equiv 1, 2 \pmod{11}, \\ f(n, 8) & \text{dla } n \equiv 3 \pmod{11}, \\ f(n, 7) & \text{dla } n \equiv 4 \pmod{11}, \\ f(n, 6)f(n+17, 2) & \text{dla } n \equiv 5 \pmod{11}, \\ f(n, 5)f(n+16, 3) & \text{dla } n \equiv 6 \pmod{11}, \\ f(n, 4)f(n+15, 4) & \text{dla } n \equiv 7 \pmod{11}, \\ f(n, 3)f(n+14, 5) & \text{dla } n \equiv 8 \pmod{11}, \\ f(n, 2)f(n+13, 6) & \text{dla } n \equiv 9 \pmod{11}, \\ f(n+12, 7) & \text{dla } n \equiv 10 \pmod{11}, \end{cases}$$

$$(8) \quad f(n, 19, P_{11}) - f(n, 19, P_{13}) = \begin{cases} f(n+13, 6) & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{13}, \\ 0 & \text{dla } n \equiv 1, 2, 3, \\ & 4, 5, 6 \pmod{13}, \\ f(n, 6) & \text{dla } n \equiv 7 \pmod{13}, \\ f(n, 5) & \text{dla } n \equiv 8 \pmod{13}, \\ f(n, 4)f(n+17, 2) & \text{dla } n \equiv 9 \pmod{13}, \\ f(n, 3)f(n+16, 3) & \text{dla } n \equiv 10 \pmod{13}, \\ f(n, 2)f(n+15, 4) & \text{dla } n \equiv 11 \pmod{13}, \\ f(n+14, 5) & \text{dla } n \equiv 12 \pmod{13}, \end{cases}$$

$$(9) \quad f(n, 19, P_{13}) - f(n, 19, P_{17}) = \begin{cases} f(n+17, 2) & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{17}, \\ 0 & \text{dla } n \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \\ & 10, 11, 12, 13, 14 \pmod{17}, \\ f(n, 2) & \text{dla } n \equiv 15 \pmod{17}, \\ 1 & \text{dla } n \equiv 16 \pmod{17}, \end{cases}$$

$$(10) \quad f(n, 19, P_{17}) - f(n, 19, P_{19}) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{19}, \\ 0 & \text{dla } n \not\equiv 0 \pmod{19}. \end{cases}$$

W celu znalezienia wartości  $a_{19}$  i  $b_{19}$  posłużono się komputerem. Wyznaczanie wartości  $a_k$  nawet dla wielkich liczb naturalnych  $k$  nie jest kłopotliwe. W *Dodatku* zamieszczony został kod procedur w języku C++ umożliwiający wyznaczenie wartości  $a_n$  oraz  $f(n, k)$ .

Wyznaczenie wartości  $b_{19}$  jako minimum funkcji  $f(n, 19)$  w sposób „siłowy” jest czasochłonne. Nawet po zamianie tradycyjnej metody wyznaczania wartości największego

wspólnego dzielnika gcd za pomocą algorytmu Euklidesa na algorytm binarny gcd2–Steina, czas obliczeń na komputerze domowym o wymienionych wcześniej parametrach wyniósł prawie 48 godzin. Jest to czas wielokrotnie dłuższy niż przy wykorzystaniu wzorów (7), (8), (9) i (10).

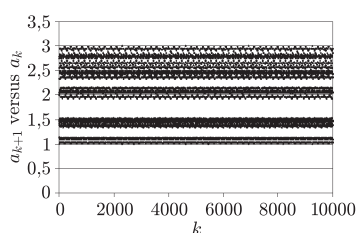
Za pomocą komputera wyznaczono wartości  $a_k$  dla wszystkich  $k \leq 10\,000$  w celu zbadania zachowania się ciągów  $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ ,  $\log a_k$  oraz  $\frac{\log a_k}{k}$  dla  $k = 1, 2, \dots$ .

Wyniki tych badań ilustruje seria zamieszczonych na marginesach rysunków.

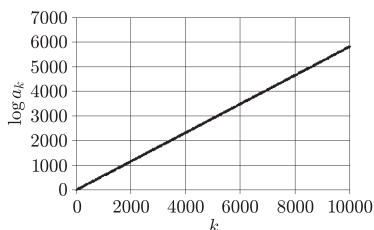
Z analizy tych wykresów płyną następujące wnioski:

1. Wykres wartości ciągu  $\frac{a_{k+1}}{a_k}$  ulega rozwarstwieniu w przedziale wartości (1, 3) (rys. 1).
2. Ciąg  $\log a_k$  rośnie liniowo względem  $k$  (rys. 2).
3. Ciąg  $\frac{\log a_k}{k}$ , poczynając od wyrazu  $k$  o numerze 7561 do 10000, ma swoje wartości w przedziale (0,5814, 0,5816). Górna granica przedziału została przyjęta z pewnym nadmiarem. Wartość funkcji eksponent od lewego i prawego krańca przedziału jest odpowiednio równa 1,78854 oraz 1,7888. Jest wysoce prawdopodobne, że granica ciągu  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log a_k}{k}$  istnieje i jej początkowymi cyframi są 1,788...

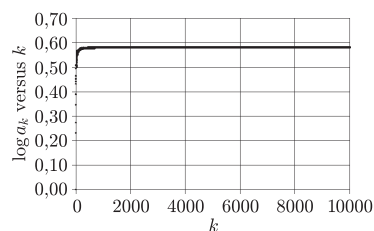
**Podziękowanie.** Panu Docentowi dr. hab. Andrzejowi Pokrzywie wyrażamy wdzięczność za pomoc przy dowodzie Lematu 4.



Rys. 1. Zachowanie się ciągu  $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ .



Rys. 2. Zachowanie się ciągu  $\log a_k$ .



Rys. 3. Zachowanie się ciągu  $\frac{\log a_k}{k}$ .

## Dodatek

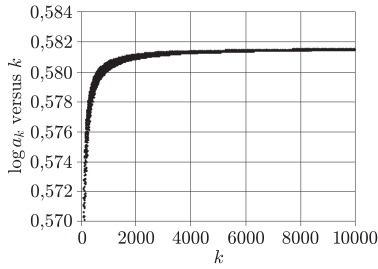
### Wyznaczanie wartości ciągu $a_n$

```
unsigned int an( int n )
{
    int c_counter=1;
    buffer[0]=1;

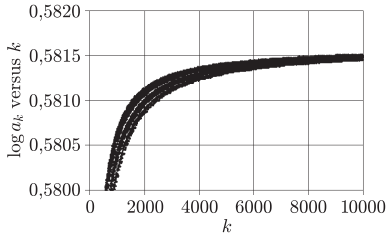
    while ( c_counter<n )
    {
        int sum=0;
        for ( int i=0; i<c_counter; i++ )
        {
            if ( gcd(c_counter+1,i+1)==1 )
            {
                sum+=buffer[i];
            }
        }
        buffer[c_counter++]=sum;
    }

    return(buffer[n-1]);
}
```

Wartość  $b_{19}$  wyznaczono dwoma sposobami. Pierwszy z nich wykorzystuje wzór (2) i powyższe wzory (7), (8), (9) i (10). Obliczenia na domowym komputerze z procesorem Intel Pentium z zegarem 2700 MHz pozwalają wyznaczyć  $b_{19} = 24\,014$ . Wartość  $b_{19}$  można także obliczyć „siłowo” bezpośrednio w oparciu o definicję ciągu  $b_k$ , znajdując dla ustalonego  $k$  minimum funkcji okresowej  $f(n, k)$  ze względu na pierwszą zmienną  $n$ . Znajdowanie wartości  $f(n, k)$  realizuje poniższa napisana w języku C++ funkcja  $f2(n, k)$ .



Rys. 4. Zachowanie się ciągu  $\frac{\log a_k}{k}$ .



Rys. 5. Zachowanie się ciągu  $\frac{\log a_k}{k}$ .

```

unsigned int f2( int n, int k )
{
    int op_counter=0;
    int num_seq=0;

    int limit=n+k;
    buffer[op_counter++]=n;

    do
    {
        int curr_op = buffer[0];
        buffer[0]=buffer[--op_counter];

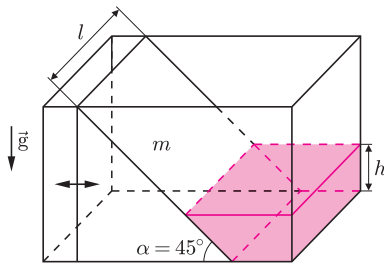
        if ( gcd2(curr_op,limit)==1 ) num_seq++;

        for ( int i=curr_op+1; i<limit; i++ )
        {
            if ( gcd2(curr_op,i)==1 ) buffer[op_counter++]=i;
        }
    }while(op_counter>0);
    return(num_seq);
}
    
```



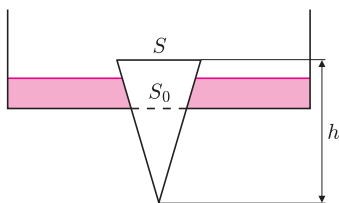
## Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 1

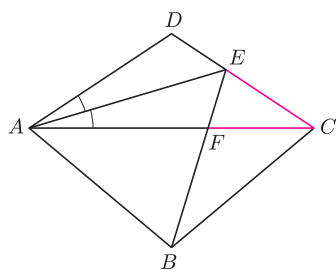
**F 739.** Do naczynia w kształcie prostopadłościanu wstawiono przylegający do ścianek bocznych i trochę odsunięty od ścianki czołowej klin, a następnie do powstałego w ten sposób naczynia nalano wody (rys. 1). Zakładając, że tarcie między klinem a ściankami bocznymi jest zanedbywalnie małe, znaleźć maksymalny współczynnik tarcia klocka o podłogę naczynia, przy którym nie będzie on spoczywał. Przyjąć, że szerokość klina wynosi  $l = 20$  cm, masa  $m = 90$  g, kąt przy wierzchołku wynosi  $\alpha = 45^\circ$ , a wysokość słupa wody jest równa  $h = 1$  cm. Rozwiązanie na str. 8



Rys. 2

**F 740.** Okrągły otwór w dnie naczynia zatkało korkiem w kształcie stożka o polu powierzchni podstawy  $S$  (rys. 2). Dla jakiej największej gęstości korka  $\rho$  można, nalewając do naczynia wody, spowodować jego wypłynięcie? Pole powierzchni otworu wynosi  $S_0$ , napięcie powierzchniowe wody można zanedbać. Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Waldemar POMPE



Rys. 3

**M 1240.** Rozstrzygnąć, czy istnieje 19-cyfrowa liczba naturalna  $N$  podzielna przez 11 o tej własności, że każda inna 19-cyfrowa liczba otrzymana z  $N$  poprzez zmianę kolejności (permutację) jej cyfr nie jest podzielna przez 11. Rozwiązanie na str. 2

**M 1241.** Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym  $AB = BC$ ,  $AD = DC$  oraz  $\sphericalangle ABC = 3\sphericalangle ACD$  (rys. 3). Dwusieczna kąta  $CAD$  przecina bok  $CD$  w punkcie  $E$ . Odcinki  $AC$  i  $BE$  przecinają się w punkcie  $F$ . Wykazać, że trójkąt  $CEF$  jest równoramienny. Rozwiązanie na str. 18

**M 1242.** Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną, której nie da się przedstawić w postaci

$$\frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d},$$

gdzie  $a, b, c, d$  są liczbami całkowitymi dodatnimi. Rozwiązanie na str. 24