Styczne do okręgu samą linijką

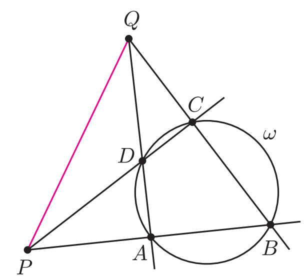
W marcu br. został wydrukowany kolejny plakat SEM. Przedstawia on w czterech krokach konstrukcję — przy użyciu jedynie linijki — stycznych do okręgu przechodzących przez dany punkt (zob. okładka). Niniejszy tekst jest poświęcony wykazaniu poprawności tej konstrukcji.

W dowodzie wykorzystamy pojęcia *potęgi punktu względem okręgu* oraz *osi potęgowej*.

Więcej o potędze punktu względem okręgu i o prostej potęgowej dowiedzieć się można, rozwiązując zamieszczone w tym numerze zadania M 1249, M 1250 i M 1251.

Niech ω będzie okręgiem o środku O i promieniu r, a P dowolnym punktem. *Potęgą punktu P względem okręgu ω* nazywamy liczbę $\mathrm{pot}(P,\omega) = PO^2 - r^2$.

Jedną z przyczyn, dla której wprowadzenie pojęcia potęgi staje się użyteczne, jest następujący fakt: *zbiorem tych punktów, które mają równe potęgi względem danych dwóch okręgów ω_1 i ω_2 (o różnych środkach), jest prosta*. Prostą tę nazywamy *osią potęgową okręgów ω_1 i ω_2*.



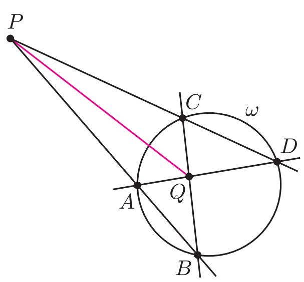
Rys. 1

Przejdźmy teraz do dowodu poprawności konstrukcji. Kluczowym faktem jest tu następujący lemat.

Lemat. *Punkty A, B, C, D leżą na okręgu ω. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P, a proste AD i BC przecinają się w punkcie Q. Wówczas*

$$\mathrm{pot}(P,\omega) + \mathrm{pot}(Q,\omega) = PQ^2.$$

Uwaga. Sformułowanie lematu nie precyzuje, w jakiej kolejności punkty A, B, C, D leżą na okręgu ω, a więc mogą leżeć dowolnie. Daje to dwie istotnie różne konfiguracje geometryczne. W jednej z nich punkty P, Q leżą na zewnątrz okręgu ω (rys. 1), a w drugiej jeden z punktów P lub Q leży wewnątrz okręgu ω, drugi na zewnątrz (rys. 2).



Rys. 2

Dowód lematu. Dowód przeprowadzimy dla konfiguracji przedstawionej na rysunku 1. W przypadku konfiguracji z rysunku 2 dowód jest analogiczny.

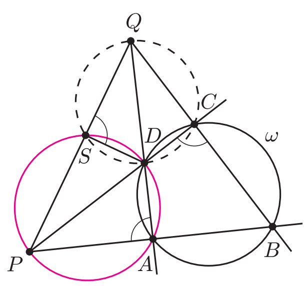
Przyjmijmy, że okrąg opisany na trójkącie ADP przecina prostą PQ w punkcie S (rys. 3). Wówczas

$$\sphericalangle QSD = \sphericalangle PAD = \sphericalangle BCD,$$

skąd wynika, że na czworokącie $CQSD$ można opisać okrąg. Wobec tego

$$\mathrm{pot}(P,\omega) + \mathrm{pot}(Q,\omega) = PC \cdot PD + QA \cdot QD = PS \cdot PQ + SQ \cdot PQ = PQ^2,$$

co należało wykazać.



Rys. 3

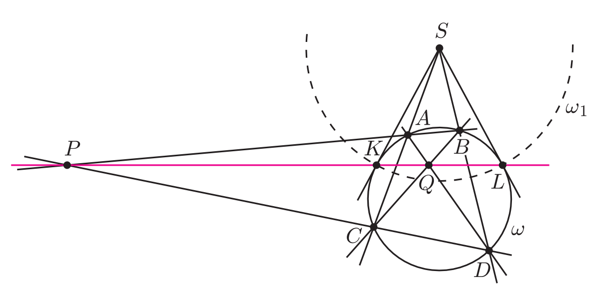
Udowodnimy teraz twierdzenie, z którego już bezpośrednio wynika poprawność konstrukcji.

Twierdzenie. *Z punktu S leżącego na zewnątrz okręgu ω poprowadzono styczne SK i SL do okręgu ω (rys. 4). Przez punkt S poprowadzono również dwie proste, które przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach A, C oraz B, D. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P, a proste AD i BC przecinają się w punkcie Q. Wówczas punkty K, L, P, Q leżą na jednej prostej.*

Dowód twierdzenia. Niech ω_1 będzie okręgiem o środku S i promieniu $SK = SL$. Na mocy lematu otrzymujemy $\mathrm{pot}(P,\omega) + \mathrm{pot}(S,\omega) = PS^2$. Stąd dostajemy

$$\mathrm{pot}(P,\omega) = PS^2 - SK^2 = \mathrm{pot}(P,\omega_1),$$

co oznacza, że punkt P leży na osi potęgowej okręgów ω i ω_1, a więc na prostej KL. Analogicznie, wykorzystując równość $\mathrm{pot}(Q,\omega) + \mathrm{pot}(S,\omega) = SQ^2$, dowodzimy, że punkt Q leży na prostej KL. Dowód twierdzenia jest więc zakończony.



Rys. 4

Inny dowód poprawności konstrukcji, nawiązujący do metod geometrii rzutowej, można znaleźć w artykule Marka Kordosa w *Matematyce* 5/1995.