# Potrójne urodziny

*Michał ADAMASZEK*

Klasyczna wersja tak zwanego paradoksu, o którym mowa w artykule Tomasza Nikodema, dotyczy sytuacji, w której szukamy w danej grupie $k$ ludzi dwóch osób urodzonych tego samego dnia roku. Okazuje się, że wystarczy grupa 23-osobowa ($k = 23$), aby prawdopodobieństwo znalezienia takiej pary przekroczyło $1/2$ (zakładamy zawsze, że każda data urodzenia jest jednakowo prawdopodobna, co ponoć nie jest do końca zgodne z rzeczywistością). A jaka próbka jest potrzebna, abyśmy mieli równie dużą szansę na znalezienie *trzech* osób urodzonych tego samego dnia?

Oznaczmy liczbę dni w roku przez $n$, a liczność naszej grupy przez $k$. Zdarzenie „istnieją trzy osoby urodzone tego samego dnia" jest dopełnieniem zdarzenia „każdego dnia urodziny obchodzą co najwyżej dwie z danych $k$ osób". Prawdopodobieństwo tego drugiego można obliczyć, na przykład, tak. Niech $l$ będzie liczbą dni, w które wypadają podwójne urodziny jakiejś pary ($l = 0, 1, \ldots$). Wtedy łączna liczba dni urodzinowych to $l + (k - 2l) = k - l$. Wybieramy te dni w roku (na $\binom{n}{k-l}$ sposobów), decydujemy, które z nich będą podwójne (na $\binom{k-l}{l}$ sposobów), ustawiamy całe towarzystwo w kolejkę (na $k!$ sposobów), po czym w tej kolejności przypisujemy osoby do kolejnych wybranych dni, na początku po dwie osoby do dni podwójnych (aż zużyjemy $2l$ osób), a potem po jednej osobie do dni pojedynczych. W ten sposób każdą konfigurację liczymy $2^l$ razy (kolejność osób w każdej z pierwszych $l$ par). Reasumując, szukanych konfiguracji jest

$$f_{n,k} = \sum_{l \geqslant 0} \binom{n}{k-l} \binom{k-l}{l} \frac{k!}{2^l}.$$

Składnik odpowiadający $l = 0$ to dokładnie liczba konfiguracji, w których każdy ma inną datę urodzin. Zatem poszukiwane prawdopodobieństwo, że istnieją trzy osoby świętujące wspólnie, to

$$p_{n,k} = 1 - \frac{f_{n,k}}{n^k}.$$

Aby rozwiązać nasze zadanie, kładziemy $n = 365$ i szukamy takiego $k$, żeby $p_{365,k} > 1/2$. (Jako ćwiczenie z manipulowania sumami polecam sprawdzenie, czy aby na pewno $p_{n,1} = p_{n,2} = 0$ oraz $p_{n,3} = 1/n^2$. Te rzeczy wiemy bez rachunków.) To dobre zadanie dla komputera, a odpowiedzią jest wartość:

$$p_{365,88} = 0{,}511\ldots,$$

a zatem potrzeba 88 osób, aby mieć duże (co najmniej 50%) szanse na znalezienie trzech urodzonych w tym samym dniu.

Czytelnikowi Bardzo Wytrwałemu pozostawiamy analogiczne zadanie z wymogiem czterech, pięciu i więcej osób o wspólnej dacie urodzenia oraz następujący problem z nieco innej beczki: jak liczna musi być grupa, abyśmy mieli co najmniej 50% szans na to, że *codziennie* będziemy obchodzić czyjeś urodziny?

# Zadania

*Redaguje Waldemar POMPE*

**M 1273.** Wyznaczyć wszystkie trójki liczb całkowitych $x, y, z$ spełniające równanie $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.
Rozwiązanie na str. 17

**M 1274.** Każdy punkt koła domkniętego o promieniu 1 pomalowano na jeden z trzech kolorów. Dowieść, że istnieją dwa punkty tego samego koloru, których odległość wynosi 1.
Rozwiązanie na str. 9

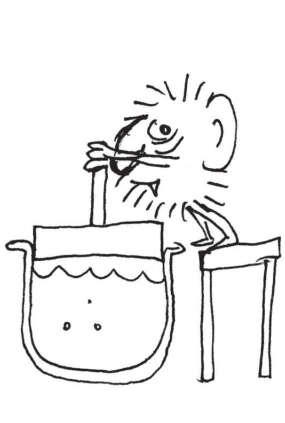
**M 1275.** Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ są dodatnie i ich suma wynosi 1. Udowodnić, że

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{99}x_{100} < \tfrac{1}{4}.$$

Rozwiązanie na str. 6

*Redaguje Ewa CZUCHRY*

**F 761.** Skraplacz składa się z rury wypełnionej zimną wodą, przez którą przechodzi przewód z parą wodną. Do wnętrza skraplacza z jednej strony wpuszcza się strumień pary wodnej o temperaturze $t_1 = 100$ °C w ilości $q_1 = 1$ kg/s, a z drugiej strony strumień wody o temperaturze $t_2 = 20$ °C w ilości $q_2 = 20$ kg/s. Znaleźć temperaturę wody wychodzącej ze skraplacza. Ciepło parowania wody to $\lambda = 2{,}26 \cdot 10^6$ J/kg, a ciepło właściwe wody wynosi $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ J/(kg $\cdot$ K). Założyć, że skraplacz jest skuteczny, tzn. temperatura skroplonej pary opuszczającej skraplacz jest równa początkowej temperaturze chłodzącej wody.
Rozwiązanie na str. 16



**F 762.** W naczyniu, nad powierzchnią wody, znajduje się powietrze, ściśnięte obciążonym tłokiem do ciśnienia $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Pa. Odległość tłoka od powierzchni wody jest taka sama, jak wysokość słupa wody $h = 2$ cm. Temperatura wody i powietrza wynosi $t_1 = 6$°C. Na jakiej wysokości nad powierzchnią wody znajdzie się tłok, jeśli naczynie z wodą ogrzejemy do temperatury $t_2 = 100$°C? Ciśnienie pary wodnej w temperaturze 6°C oraz tarcie zaniedbać.
Rozwiązanie na str. 24