Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

19. i 20. lutego 2010 roku odbyły się zawody II stopnia LXI Olimpiady Matematycznej. Do udziału w nich zakwalifikowano 533 uczniów. Każdego dnia zawodnicy rozwiązywali po 3 zadania w ciągu 5 godzin. Zadania i ich rozwiązania przygotowane przez Komisję Zadaniową Komitetu Głównego można znaleźć na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej pod adresem www.om.edu.pl.

W momencie pisania tego tekstu znane były jedynie wstępne oceny prac, które mogły ulec jeszcze nieznacznym zmianom. Tym razem najtrudniejsze okazało się zadanie 3, które rozwiązało poprawnie około 10 uczniów. Wszystkie rozwiązania były zbliżone do rozwiązania zaproponowanego przez Komisję Zadaniową.

Wielu uważa, że najtrudniejsze jest ostatnie, szóste zadanie zawodów. Rozwiązało je poprawnie około 30 zawodników, zatem było ono jednak łatwiejsze niż zadanie 3, choć trudniejsze od pozostałych. Interesujące jest jednak to, że znaleziono przynajmniej 5 istotnie różnych jego rozwiązań. Być może więc wielu uczniów, sugerując się tym, że było to zadanie ostatnie, przeceniło jego trudność. Przypomnijmy treść tego zadania:

Dany jest n-elementowy zbiór liczb rzeczywistych, przy czym $n \geqslant 6$. Dowieść, że istnieje co najmniej $n-1$ dwuelementowych podzbiorów tego zbioru, w których średnia arytmetyczna elementów jest nie mniejsza niż średnia arytmetyczna elementów całego zbioru.

Dla n parzystych rozwiązanie wynika natychmiast z następującego twierdzenia o turniejach:

Rozgrywany jest turniej z udziałem n zawodników, w którym każdy zawodnik rozgrywa z każdym innym dokładnie jeden mecz. Runda turnieju to dowolny układ meczów, w którym każdy zawodnik występuje co najwyżej jeden raz. Jeśli n jest liczbą parzystą, to turniej można rozegrać w dokładnie $n-1$ rundach.
zob. XLVIII Olimpiada Matematyczna 1996/97;
Sprawozdanie Komitetu Głównego, Warszawa 1998.

Wystarczy przyjąć, że liczby to zawodnicy. W każdej rundzie biorą udział wszyscy zawodnicy, więc granych jest $\frac{n}{2}$ meczów. Oznacza to, że liczby zostały połączone w $\frac{n}{2}$ par. Średnia arytmetyczna wszystkich n liczb jest równa średniej arytmetycznej $\frac{n}{2}$ średnich arytmetycznych par. Wobec tego średnia co najmniej jednej pary jest większa lub równa średniej arytmetycznej wszystkich liczb. Jest tak dla każdej „rundy turnieju", a rozgrywano ich $n-1$. Oczywiście dwaj zawodnicy spotykają się tylko w jednej rundzie, więc żadna para nie powtarza się.

Tego rozumowania nie umiemy rozszerzyć na przypadek nieparzystego n „w dwóch wierszach", więc nie jest to nawet połowa pełnego rozwiązania.

Zadanie drugie rozwiązało około 180 uczniów. Cieszy to, że nie zlękli się oni stereometrii, która zajmuje niezbyt wiele miejsca w obecnych programach szkolnych. Oto jego treść.

Punkty A', B', C' są rzutami prostokątnymi wierzchołków A, B, C czworościanu $ABCD$ na przeciwległe ściany. Dowieść, że jeżeli punkt A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD, punkt B' jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD, a punkt C' jest środkiem ciężkości trójkąta ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny.

Większość uczniów najpierw dowodziła, że rozważany czworościan musi być ostrosłupem prawidłowym, a dopiero potem, że jest foremny. Ta druga część – pozornie łatwa – stawiała jeszcze spory opór, który nie wszystkim udało się przezwyciężyć.

Dla porządku dodajmy jeszcze, że liczba poprawnych rozwiązań zadania 1 i zadania 4 to około 290, a zadania 5 – około 100.

W informacji o rozwiązaniach zadań z I stopnia 61 edycji OM podanej w *Delcie* 3/2010, str. 21, wkradły się błędy. Otóż zadania 11 i 8 rozwiązało około, odpowiednio, 2% i 10% uczestników, a nie jak błędnie napisano 0,02% i 0,1%. Serdecznie dziękujemy p. Adamowi Dzedzejowi – członkowi Komitetu Okręgowego OM w Gdańsku – za zwrócenie nam uwagi na te pomyłki.