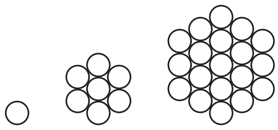
Zobaczyć przestrzennie *Joanna JASZUŃSKA*

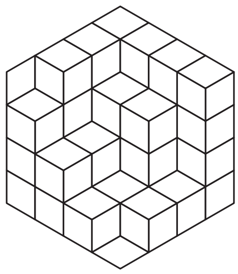
W poprzednim *deltoidzie* zaprezentowano kilka zadań z geometrii płaskiej, rozwiązanych poprzez „wyjście w przestrzeń”. Oto garść kolejnych przykładów na to, że warto płaskie rysunki postrzegać jako ilustracje sytuacji trójwymiarowych.

1. Rysunek 1 przedstawia definicję *liczb szóstkowych*. Sformułuj wzór ogólny na h_n oraz wzór na sumę $h_1 + h_2 + \ldots + h_n$.



Rys. 1. Liczby szóstkowe: $h_1 = 1$, $h_2 = 7$, $h_3 = 19, \ldots$

2. W pudełku w kształcie sześciokąta foremnego o boku długości n układamy romby o boku długości 1 i kącie 60° (rys. 2). Każdy z rombów ma krótszą przekątną równoległą do któregoś z boków sześciokąta, można zatem wyróżnić trzy *orientacje* rombów. Wykaż, że przy każdym wypełnieniu pudełka zawsze jest tyle samo rombów każdej z trzech orientacji.



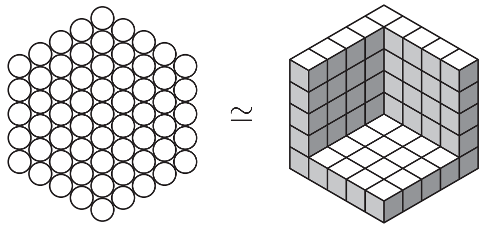
Rys. 2. Francuskie słodycze *calissons* mają kształt zbliżony do takich rombów i bywają sprzedawane w sześciokątnych pudełkach.

3. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P w jego wnętrzu. Punkty X, Y, Z są obrazami punktu P w symetriach odpowiednio względem środków odcinków BC, AC, AB. Wykaż, że proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie.

4. Okręgi O_1, O_2, O_3 wszystkie mają promień r i przecinają się odpowiednio: O_1 z O_2 w punktach C i P, O_1 i O_3 w punktach B i P, O_2 i O_3 w punktach A i P. Udowodnij, że okrąg opisany na trójkącie ABC również ma promień r.

Rozwiązania

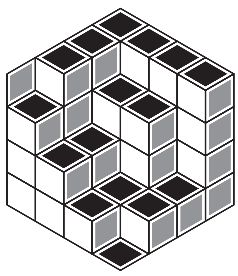
R1. Spójrzmy na rysunek 1 przestrzennie (rys. 3).



Rys. 3. Liczby szóstkowe przestrzennie.

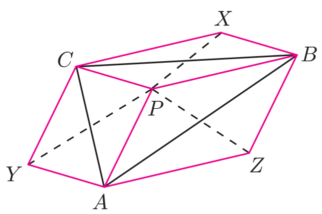
Czy teraz widać, że $h_n = n^3 - (n-1)^3$ oraz że $h_1 + h_2 + \ldots + h_n = n^3$? □

R2. Romby o jednej orientacji pokolorujmy na czarno, o drugiej na szaro, o trzeciej pozostawmy białe (rys. 4). Następnie spójrzmy na rysunek 4 przestrzennie, raz „z góry”, raz „z lewej”, a raz „z prawej” strony. □



Rys. 4. *Calissons* przestrzennie.

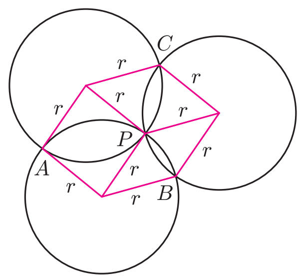
R3. Punkty P, A, Z, B tworzą równoległobok, bo środek boku AB jest zarazem środkiem odcinka PZ (rys. 5). Podobnie $PBXC$ i $PCYA$ są równoległobokami. Kolorowa część rysunku 5, widziana przestrzennie, to pewien równoległościan. Odcinki AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie jako jego przekątne.



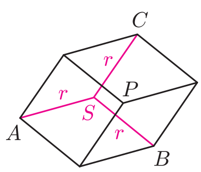
Rys. 5

Dla punktu P na zewnątrz trójkąta ABC rozwiązanie jest analogiczne. □

R4. Narysujmy promienie okręgów ze środków do punktów A, B, C, P. Wszystkie są równe, więc otrzymane trzy czworokąty są rombami (rys. 6).



Rys. 6



Rys. 7

Patrząc przestrzennie na utworzoną przez nie figurę, można dostrzec równoległościan. Ma on ósmy, niezaznaczony dotychczas wierzchołek, nazwijmy go S (rys. 7). Wracając do sytuacji płaskiej, na rysunku 7 widzimy, że $SA = SB = SC = r$. Punkt S jest więc środkiem okręgu o promieniu r, opisanego na trójkącie ABC. Dla punktu P na zewnątrz trójkąta ABC rozwiązanie jest analogiczne. □

Zachęcam, by dowieść dodatkowo, że punkt P jest ortocentrum trójkąta ABC.

Bibliografia

[1] Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words*, Math. Assoc. America, 1997.

[1] `www.cut-the-knot.org`