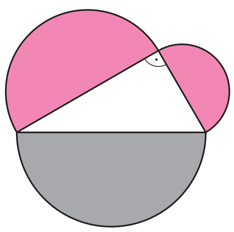
Księżyce Hipokratesa

Joanna JASZUŃSKA

Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że gdy na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy kwadraty, to suma pól dwóch mniejszych jest taka, jak pole trzeciego. Czy jest to własność przysługująca jedynie kwadratom? Łatwo sprawdzić, że nie – zachodzi też, na przykład, dla trójkątów równobocznych, dla półkoli (rys. 1), a także dla dowolnych innych figur podobnych.

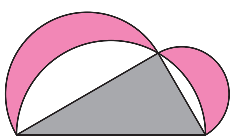
Hipokrates z Chios (V w. p.n.e.) badał takie księżyce, poszukując konstrukcji kwadratury koła.



Rys. 1. Fakt $(*)$: Twierdzenie Pitagorasa zachodzi też dla półkoli.

1. Udowodnij fakt $(*)$ (rys. 1) oraz sformułowane powyżej ogólniejsze twierdzenie.

Przyjrzyjmy się pewnym konsekwencjom tych obserwacji. Wszystkie łuki na poniższych rysunkach są okręgami lub półokręgami, ich średnicami są boki trójkątów lub inne wyróżnione odcinki.

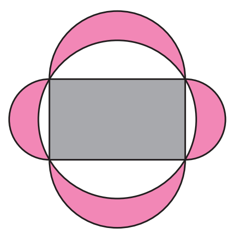


Rys. 2. Księżyce Hipokratesa.

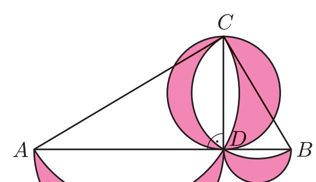
2. Wykaż, że suma pól kolorowych *księżyców Hipokratesa* (rys. 2) równa jest polu szarego trójkąta.

3. Prostokąt o bokach długości a i b jest wpisany w okrąg. Na jego bokach zbudowano cztery księżyce (rys. 3). Wyznacz sumę ich pól.

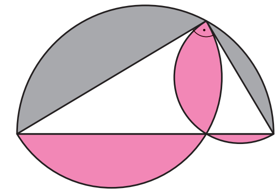
4. Odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC (niekoniecznie prostokątnego), punkt D należy do odcinka AB (rys. 4). Okręgi o średnicach AC, BC, AD, BD i CD wyznaczają cztery księżyce. Wykaż, że suma ich pól równa jest polu trójkąta ABC.



Rys. 3

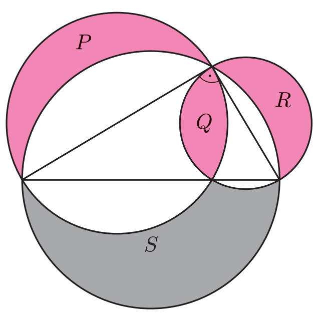


Rys. 4



Rys. 5

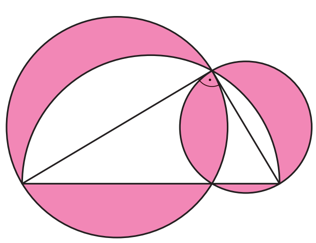
5. W sytuacji z rysunku 5 udowodnij, że suma pól kolorowych figur równa jest sumie pól szarych figur.



Rys. 6

6. Na rysunku 6 litery wewnątrz obszarów oznaczają ich pola, T to pole trójkąta. Wykaż, że $P + Q + R = S = T + Q$.

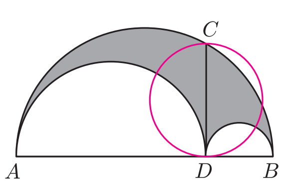
7. Udowodnij, że suma pól kolorowych figur z rysunku 7 równa jest polu półkola zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta.



Rys. 7

8. Wykaż, że pole szarej figury z rysunku 8 jest równe polu koła o średnicy CD.

9. Wyznacz sumy obwodów księżyców z rysunku 2 (znając obwód trójkąta), księżyców z rysunku 3 oraz obwód figury z rysunku 8.



Rys. 8

Rozwiązania niektórych zadań

R2. Suma pól księżyców to pole trójkąta wraz z półkolami na przyprostokątnych minus pole półkola zbudowanego na przeciwprostokątnej. Teza wynika z faktu $(*)$. □

R5. Suma szarych figur i trójkąta to półkole zbudowane na przeciwprostokątnej. Na mocy faktu $(*)$, jego pole jest równe sumie pól półkoli zbudowanych na przyprostokątnych. Taka właśnie jest suma pól kolorowych figur i trójkąta, co kończy dowód. □

R6. Z faktu $(*)$, suma pól kół zbudowanych na przyprostokątnych równa jest polu koła zbudowanego na przeciwprostokątnej. Pierwszą część tezy uzyskujemy, odejmując od obu stron powyższej równości pole części wspólnej największego koła z sumą dwóch mniejszych. Z zadania 2 mamy $T = P + R$, stąd druga część tezy. □

R8. Niech $[XY]$ oznacza pole półkola o średnicy XY. Trójkąt ABC jest prostokątny, więc, trzykrotnie korzystając z faktu $(*)$, otrzymujemy

$$[AB] - [AD] - [BD] = ([AC] + [BC]) - [AD] - [BD] = \\ = ([AD] + [CD]) + ([BD] + [CD]) - [AD] - [BD] = 2[CD]. \ \square$$

Zachęcam do samodzielnego odkrywania podobnego rodzaju figur i badania ich pól.