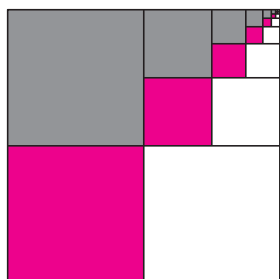
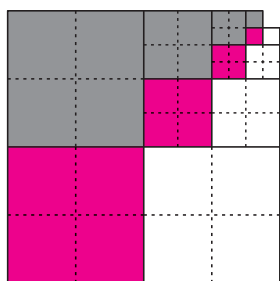


Niektóre sumy nieskończone można zilustrować, tworząc nieskończony rysunek, którego pewna część jest podobna do całości. Na przykład na rysunku 1 taką częścią jest jego prawa górna ćwiartka, a także prawa górna ćwiartka tej ćwiartki itd. Poniżej kilka przykładów sum nieskończonych wraz z tego rodzaju ilustracjami. Na każdym z rysunków kolorowa część odpowiada rozważanej sumie.

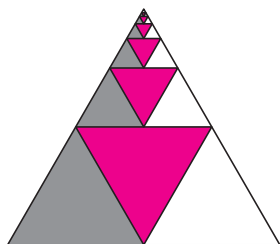
Dlaczego poszczególne rysunki ilustrują odpowiednie sumy? Które części rysunków są podobne do całości?



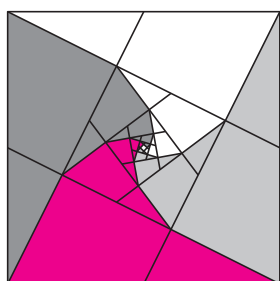
Rys. 1



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

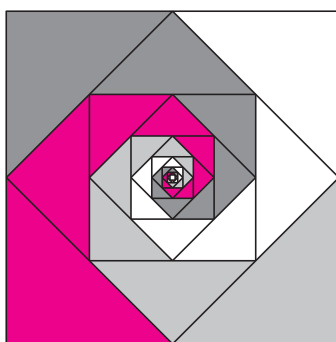
Literatura

C. Alsina, R. Nelsen, *Math Made Visual*, The Mathematical Association of America, 2006.

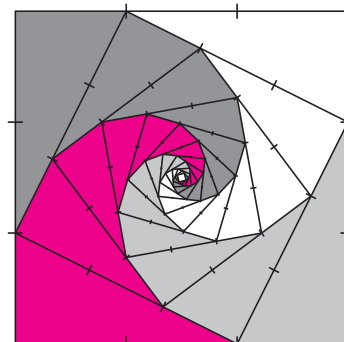
Rys. 1. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{1}{3}$.

Rys. 2. $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{4}$.

Rys. 3. $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^3 + \dots = \frac{1}{4}$.



Rys. 2

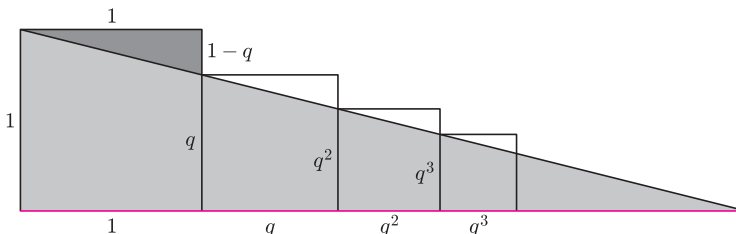


Rys. 3

Równości 1–3 można też uzyskać ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego:

Rys. 4. Dla $0 < q < 1$ zachodzi równość $1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$.

Opis: Ustawmy kolejno kwadraty o bokach $1, q, q^2, q^3, \dots$



Rys. 4

Połączmy lewe górne wierzchołki kolejnych kwadratów. Uzyskane odcinki leżą na jednej prostej, bo w każdym kwadracie prawy bok podzielony jest w takim samym stosunku $(1 - q) : q$. Jasny trójkąt jest podobny do ciemnego (bo mają równe kąty), stąd równość stosunków długości ich przyprostokątnych:

$$\frac{1 + q + q^2 + q^3 + \dots}{1} = \frac{1}{1 - q}. \quad \square$$

Podobnymi rysunkami można ilustrować niektóre sumy skończone:

Rys. 5. Dla całkowitych $n > 0$ zachodzi $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$.

Opis: Kwadraty w każdym z trzech kolorów mają łączne pole $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n$, a wszystkie razem mają pole $4 \cdot 4^n - 1 = 4^{n+1} - 1$. \square

Zadania domowe

1. Znajdź ilustracje sum:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots = \frac{1}{8}.$$

2. Ilustracją jakiej sumy jest rysunek 6?

3. Sprawdź, że rysunek 7 jest ilustracją sumy $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots = \frac{1}{4}$.