# Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

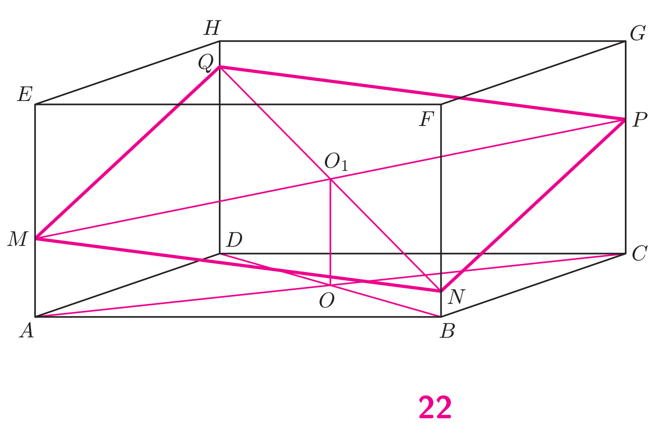
www.sem.edu.pl

W ubiegłym roku szkolnym SEM podjęło inicjatywę mającą w założeniu wspierać wszystkich tych gimnazjalistów, którzy chcieliby samodzielnie ocenić swój stopień przygotowania do Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Od połowy sierpnia 2010 r., przez dziesięć kolejnych miesięcy, na stronie `www.omg.edu.pl`, w ramach Koła Matematycznego cyklicznie ogłaszane były zestawy 7 zadań, które zakresem zagadnień odpowiadały zadaniom z OMG. Po dwóch tygodniach od ogłoszenia treści zadań na stronie internetowej OMG pojawiały się do nich wskazówki, a po kolejnych dwóch tygodniach umieszczano tam pełne rozwiązania każdego z siedmiu problemów zadanych miesiąc wcześniej. W tym samym momencie pojawiała się tam również treść zadań kolejnej serii. Równolegle w kilkunastu miastach w Polsce oraz w Gimnazjum im. Jana Pawła II w Wilnie na Litwie odbywały się otwarte zajęcia poświęcone omówieniu zagadnień pojawiających się w ogłoszonym zestawie zadań. Forma tych zajęć odpowiadała zwyczajowym omówieniom zadań odbywającym się po zawodach II i III stopnia OM i OMG. Podczas tych spotkań uczestniczący w nich gimnazjaliści i ich opiekunowie mogli podzielić się pomysłami na rozwiązanie zadań z aktualnego zestawu, czy wymienić się spostrzeżeniami na temat trudności napotkanych podczas podejmowanych prób ich rozwiązania. W trakcie zajęć omawiano kolejne zadania zestawu, przedstawiając na zakończenie rozwiązania autorskie. Często okazywało się wtedy, że przedstawione wcześniej rozwiązania uczestników oparte były na tej samej idei, co proponowane rozwiązania wzorcowe. Poniżej prezentujemy rozwiązania dwóch spośród zadań z zestawów Koła Matematycznego.

Liczby $a$, $b$, $c$, $d$ są liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Wykaż, że wśród liczb:
$$a+b-\sqrt{cd},\quad b+c-\sqrt{da},$$
$$c+d-\sqrt{ab},\quad d+a-\sqrt{bc}$$
co najmniej dwie są dodatnie.

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że jeśli suma dwóch liczb jest dodatnia, to co najmniej jedna z tych liczb jest dodatnia. Przyjmijmy oznaczenia
$$x_1=a+b-\sqrt{cd},\quad x_2=b+c-\sqrt{da},$$
$$x_3=c+d-\sqrt{ab},\quad x_4=d+a-\sqrt{bc}.$$
Ponieważ
$$\begin{aligned}x_1+x_3&=a+b-\sqrt{cd}+c+d-\sqrt{ab}=\\&=a-\sqrt{ab}+\frac14 b+c-\sqrt{cd}+\frac14 d+\frac34 b+\frac34 d=\\&=\left(\sqrt a-\frac12\sqrt b\right)^2+\left(\sqrt c-\frac12\sqrt d\right)^2+\frac34 b+\frac34 d,\end{aligned}$$
więc $x_1+x_3>0$. Zatem co najmniej jedna z liczb $x_1$, $x_3$ jest dodatnia. Analogicznie pokazujemy, że $x_2+x_4>0$, czyli co najmniej jedna z liczb $x_2$, $x_4$ jest dodatnia. Wykazaliśmy tym samym, że wśród danych czterech liczb co najmniej dwie są dodatnie.

Dany jest prostopadłościan o podstawach $ABCD$ i $EFGH$. Płaszczyzna przecina jego krawędzie boczne $AE$, $BF$, $CG$ i $DH$ odpowiednio w punktach $M$, $N$, $P$ i $Q$. Wykaż, że
$$AM+CP=BN+DQ.$$




*Rozwiązanie.* Ponieważ odcinki $MQ$ i $NP$ zawierają się w jednej płaszczyźnie i jednocześnie zawierają się w płaszczyznach równoległych, więc są to odcinki równoległe. Analogicznie równoległe są odcinki $MN$ i $PQ$. Stąd czworokąt $MNPQ$ jest równoległobokiem.

Niech ponadto punkt $O$ będzie punktem przecięcia przekątnych $AC$ i $BD$ podstawy $ABCD$, a $O_1$ – punktem przecięcia przekątnych $MP$ i $NQ$ równoległoboku $MNPQ$. Zauważmy, że odcinek $OO_1$ jest odcinkiem łączącym środki nierównoległych boków trapezów $ACPM$ i $BNQD$. Jest on równoległy do boków równoległych tych trapezów oraz
$$OO_1=\frac12(AM+CP)=\frac12(BN+DQ),$$
stąd
$$AM+CP=BN+DQ.$$

*Paweł KWIATKOWSKI*