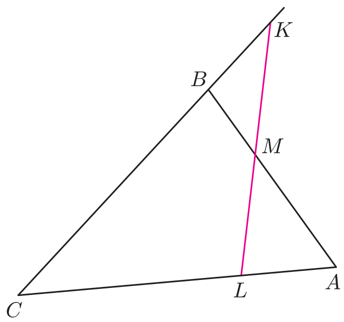
oraz – analogicznie – pole trójkąta PQR:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda\mu & \mu \\ \nu & 1 & \mu\nu \\ \nu\lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{(\lambda\mu+\mu+1)(\mu\nu+\nu+1)(\nu\lambda+\lambda+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1+(\lambda\mu\nu)^2+\lambda\mu\nu-3\lambda\mu\nu}{(\lambda\mu+\mu+1)(\mu\nu+\nu+1)(\nu\lambda+\lambda+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{(\lambda\mu+\mu+1)(\mu\nu+\nu+1)(\nu\lambda+\lambda+1)},$$

co kończy dowód.



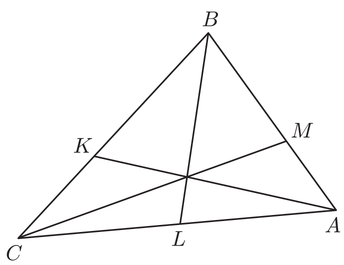
Rys. 5. Trójkąt KLM znika, ale gdzie jest teraz trójkąt PQR?

Steinhaus, Chung, Feynman, Menelaos, Ceva...

Steinhaus w *Kalejdoskopie matematycznym* (i Chung, chcąc zażartować z Feynmana) pyta tylko o pole trójkąta PQR i tylko w przypadku, gdy $\lambda=\mu=\nu=\frac{1}{2}$. Zagadnienie, w sytuacji gdy wszystkie współczynniki są równe, przedstawia się o wiele prościej: otrzymujemy dla stosunku pola KLM i PQR do pola ABC

$$\frac{\lambda^3+1}{(\lambda+1)^3} \quad \text{i} \quad \frac{(\lambda^3-1)^2}{(\lambda^2+\lambda+1)^3} = \frac{(\lambda^3-1)^2(\lambda-1)^3}{(\lambda^2+\lambda+1)^3(\lambda-1)^3} = \frac{(\lambda-1)^3}{\lambda^3-1},$$

co dla $\lambda=\frac{1}{2}$ daje $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{7}$ (ten ostatni wynik miał właśnie obliczyć Feynman – mógł też zajrzeć do wielokrotnie od 1938 r. wznawianego w USA *Mathematical Snapshots*, czyli *Kalejdoskopu*).



Rys. 6. A teraz znika trójkąt PQR.

Ale twierdzenie Routha ma o wiele ciekawsze przypadki szczególne:

- *gdy* $\lambda\mu\nu=-1$, *punkty* K, L, M *leżą na jednej prostej* (rys. 5);
- *gdy* $\lambda\mu\nu=1$, *proste* AK, BL *i* CM *przecinają się w jednym punkcie* (rys. 6),

co nie wymaga już żadnego dowodu. Fakty te znane są jako *twierdzenie Menelaosa* i *twierdzenie Cevy*. Czytelnik Zaangażowany potrafi z pewnością podać jeszcze inne wnioski z twierdzenia Routha.

Zadania

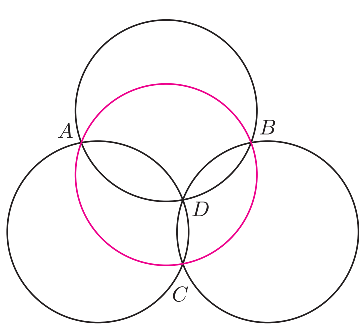
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 807. Punktowe źródło światła S oświetla przezroczystą kulkę. Dzięki przesłonie padają na nią tylko promienie biegnące blisko osi k łączącej S ze środkiem kulki. W efekcie w odległości b za kulką powstał obraz źródła S. Kulkę przecięto przez środek prostopadle do k i powierzchnię przecięcia posrebrzono. Gdzie teraz znajduje się obraz źródła S?
Rozwiązanie na str. 11

F 808. Punktowe źródło światła znajduje się pod dnem cylindra na jego osi. Cylinder jest wykonany z materiału o współczynniku załamania n. Dla jakiej najmniejszej wartości n ani jeden promień światła nie wydostanie się przez powierzchnię boczną na zewnątrz?
Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1342. Mówimy, że funkcja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma *cykl długości* n *o początku* x_0, gdy istnieje takie x_0, że liczby x_0, $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, $\ldots$, $x_{n-1}=f(x_{n-2})$ są parami różne, zaś $x_n=f(x_{n-1})=x_0$. Udowodnić, że jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych ma cykl o początku będącym liczbą całkowitą, to jest on długości 1 lub 2.
Rozwiązanie na str. 20



M 1343. Trzy okręgi o jednakowym promieniu r mają dokładnie jeden punkt wspólny D i przecinają się parami jeszcze w punktach A, B i C. Udowodnić, że okrąg wyznaczony przez punkty A, B i C również ma promień długości r.
Rozwiązanie na str. 19

M 1344. W zawodach matematycznych wzięło udział 100 uczniów. Mieli oni do rozwiązania 5 zadań. Wiadomo, że każde zadanie zostało rozwiązane przez przynajmniej 56 uczniów. Wykazać, że można wskazać takich dwóch uczniów, że każde zadanie zostało rozwiązane przynajmniej przez jednego z nich.
Rozwiązanie na str. 24