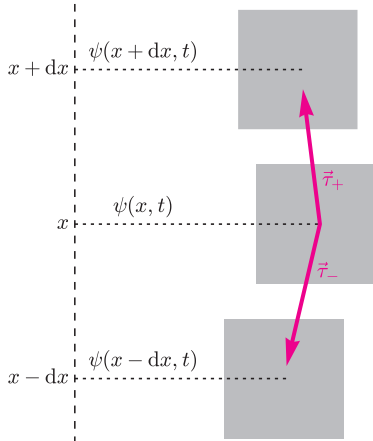


Kamerton i struna

Jacek CIBOROWSKI*, Krzysztof TURZYŃSKI



Do strojenia instrumentów często wykorzystuje się kamerton widelkowy, wynaleziony w 1711 r. przez Johna Shore'a, lutnistę angielskiego dworu królewskiego. Zaletą tego przyrządu jest to, że wprawiony w ruch emituje dźwięk bardzo „czysty”, tj. zawierający niemal wyłącznie składową wzorcową przyrządu. Zrozumienie, dlaczego tak się dzieje, nie wymaga nadmiernie skomplikowanych rachunków i długich wyjaśnień.



Rys. 1

Równania ruchu. Wyprowadzenie równania ruchu dla struny, czyli równania falowego, można znaleźć w wielu podręcznikach. Dla porządku przypomnimy tutaj zarys tego rachunku. Strunę, na którą działa siła naciągu τ , możemy podzielić w myśli na szereg małych kawałków (rys. 1). Każdy taki kawałek będzie miał masę dm , będzie znajdował się w położeniu x wzdłuż struny, a jego wychylenie względem pozycji, jaką by miał, gdyby struna spoczywała, możemy oznaczyć przez $\psi(x, t)$. Wówczas II prawo dynamiki Newtona dla odcinka struny znajdującego się w położeniu x ma postać:

$$dm \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \tau_+^\perp + \tau_-^\perp,$$

gdzie τ_\pm^\perp są składowymi sił oddziaływania $\vec{\tau}_\pm$ z sąsiednimi fragmentami struny prostopadłymi do kierunku spoczywającej struny; wielkość $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ to nic innego jak przyspieszenie w tym kierunku. Będziemy odtąd zakładać, że wychylenie z położenia równowagi jest bardzo małe. Ponieważ naciąg struny jest stały, to, przybliżając $\tan \alpha$ przez α (co jest uzasadnione właśnie dla małych wychyleń), mamy:

$$\tau_\pm^\perp \approx \pm \frac{\psi(x \pm dx, t) - \psi(x, t)}{dx} \cdot \tau,$$

skąd

$$\tau_+^\perp + \tau_-^\perp \approx dx \cdot \tau \cdot \frac{\psi(x + dx, t) - 2\psi(x, t) + \psi(x - dx, t))}{dx^2} \approx dx \cdot \tau \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Dla struny o stałej gęstości liniowej $\rho_L = dm/dx$ możemy zatem przepisać równanie ruchu jako

$$(1) \quad \frac{\rho_L}{\tau} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

W przypadku kamertonu źródło siły powodującej jego ruch jest inne. Jeżeli ramię kamertonu zostanie wygięte, to pojawi się siła sprężystości, która dla ciał sprężystych spełniających prawo Hooke'a jest proporcjonalna do odkształcenia ciała. W sytuacji przedstawionej na rysunku 2 wkład $d\vec{\tau}_-$ do siły $\vec{\tau}_-$, wywieranej na fragment ciała znajdujący się w położeniu x , jest proporcjonalny do modułu Younga substancji, z której wykonane jest ciało, oraz kąta odkształcenia $d\alpha$. Kąt ten jest równy kątowi pomiędzy prostymi o nachyleniach $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t)$ oraz $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x - dx, t)$, a zatem jest w przybliżeniu równy $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$. Oznacza to, że możemy powtórzyć rozumowanie prowadzące do wyznaczenia równania ruchu dla struny, ale z tą różnicą, że teraz siły τ_\pm nie mają stałej wartości, ale są proporcjonalne do $-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$. Otrzymujemy więc:

$$(2) \quad C \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = 0,$$

gdzie stała $C > 0$ jest odwrotnie proporcjonalna do modułu Younga. Porównując równania ruchu (1) i (2), stwierdzamy, że w tym drugim występuje aż czwarta pochodna wychylenia po położeniu. Jak się zaraz przekonamy, ta drobna z pozoru różnica decyduje o brzmieniu dźwięku kamertonu.

Rozwiązanie równań ruchu. Rozwiązania każdego z równań ruchu (1) i (2) można złożyć z fal stojących, tj. funkcji postaci $\psi(x, t) = \chi(t)f(x)$.

*Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki

Przyjmijmy, że funkcja opisująca zależność wychylenia od czasu ma postać $\chi(t) = \cos(\omega t + \phi)$. Po podstawieniu do równania (1) otrzymujemy równanie:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0,$$

gdzie tzw. związek dyspersyjny ma postać $k^2 = \tau\omega^2/\rho L$; rozwiązaniami tego równania są funkcje $\cos kx$ i $\sin kx$. Zakładając, że struna jest sztywno zamocowana w $x = 0$ i w $x = L$, musimy odrzucić pierwszą klasę rozwiązań, a wśród drugiej klasy dopuścić tylko te, dla których $f(L) = 0$, czyli $k = n\pi$, gdzie n jest liczbą naturalną. Oznacza to, że widmo częstości takiej struny jest dyskretne – występuje w nim najniższa częstość $\omega_0 = \sqrt{\tau/\rho L}$ oraz jej wielokrotności.



Podstawiając opisaną wyżej postać rozwiązania do równania (2), otrzymujemy

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - k^4 f = 0,$$

gdzie związek dyspersyjny ma teraz postać $k^2 \propto \omega$. Rozwiązaniem tego równania jest dowolna kombinacja liniowa funkcji $\sin kx$, $\cos kx$, $\sinh kx$ oraz $\cosh kx$, a więc funkcja postaci

$$f(x) = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx + B_1 \sinh kx + B_2 \cosh kx,$$

gdzie stałe A_1 , A_2 , B_1 oraz B_2 wyznaczymy z warunków brzegowych.

Warunki te dla drgającego pręta o długości L możemy opisać następująco:

1. wychylenie pręta w punkcie $x = 0$ jest zerowe, $f(0) = 0$,
2. w punkcie $x = 0$ pręt jest pionowy, $\frac{df}{dx}(0) = 0$,
3. w punkcie $x = L$ siła sprężystości jest równa zero, $\frac{d^2 f}{dx^2}(L) = 0$,
4. w punkcie $x = L$ składowa siły sprężystości prostopadła do osi x jest równa zero, $\frac{d^3 f}{dx^3}(L) = 0$.

Uwzględnienie tych warunków prowadzi do następującego związku:

$$(\sin kL + \sinh kL)(\sin kL - \sinh kL) = -(\cos kL + \cosh kL)^2,$$

a stąd

$$(3) \quad \cos kL \cosh kL + 1 = 0.$$

Rozwiązania tego równania możemy wyznaczyć w sposób następujący. Funkcja $\cosh y$ jest bardzo szybko rosnącą funkcją swego argumentu, a więc dla dostatecznie dużych y miejsca zerowe funkcji $\cos y \cosh y + 1$ będą znajdowały się blisko miejsc zerowych funkcji $\cos y \cosh y$, czyli $y = (n - \frac{1}{2})\pi$, gdzie n jest liczbą naturalną (por. rys. 3). Lepszą dokładność możemy uzyskać, zakładając, że \tilde{y} jest pewnym przybliżeniem szukanego miejsca zerowego i pisząc

$$\cos(\tilde{y} + \delta y) \cosh(\tilde{y} + \delta y) + 1 = 0.$$

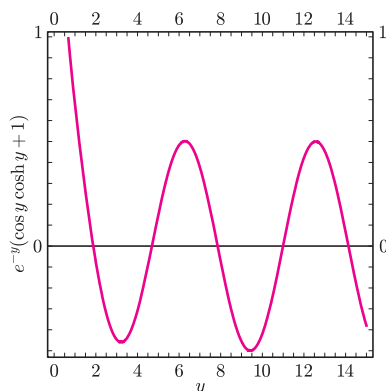
Rozwijając to w δy do rzędu kwadratowego, otrzymujemy równanie

$$\delta y^2 \sin \tilde{y} \sinh \tilde{y} - \delta y (\cos \tilde{y} \sinh \tilde{y} - \sin \tilde{y} \cosh \tilde{y}) - (\cos \tilde{y} \cosh \tilde{y} + 1) = 0,$$

co pozwala znaleźć dokładniejsze rozwiązanie $\tilde{y} + \delta y$. Opisaną procedurę można powtórzyć, uzyskując rozwiązanie z coraz lepszą dokładnością.

W ten sposób stwierdzamy, że najmniejszymi rozwiązaniami równania (3) są $kL \approx 1,87510, 4,69409, 7,85476$. Pamiętając, że w rozważanym przypadku częstość drgań jest proporcjonalna do kwadratu liczby falowej k , stwierdzamy, że częstości drgań struny i kamertonu o częstości podstawowej 440 Hz, czyli tonu A⁴, używanego do strojenia instrumentów, są takie jak w tabeli. Widzimy stąd, że dla kamertonu druga częstość dozwolonych drgań leży niemal dwie i pół oktawy powyżej tonu podstawowego, między dźwiękami E⁶ i F⁶. Jest ona na ogół słabiej słyszalna i łatwa do odróżnienia od częstości podstawowej, co sprawia, że drgający pręt jest lepszym wzorcem częstości niż drgająca struna.

W praktyce stosuje się kamertony zbudowane z dwóch drgających prętów. Takie rozwiązanie pozwala na to, by pręty te drgały w przeciwfazie, a wtedy zamocowanie kamertonu sztywno za uchwyt nie powoduje silnego tłumienia dźwięku.



Rys. 3. Wykres funkcji

$$g(y) = e^{-y}(\cos y \cosh y + 1).$$

Ponieważ czynnik e^{-y} jest dodatni, funkcja ma te same miejsca zerowe co funkcja we wzorze (3), jest jednak ograniczona na przedziale $(0, \infty)$.

częstość [Hz]	
struna kamerton	
440	440
880	2763
1320	7722

Najniższe trzy częstości drgań struny i kamertonu o podstawowej częstości 440 Hz.